ÜBER
ELEKTROMAGNETISHE DRAHTWELLEN

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

KGL. BAYR. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT
ZU MÜNCHEN

VORGELEGT

VON

D. HONDROS.

ACAD. LUDOVIC. BIBL.

MÜNCHEN 1909.

LEIPZIG
JOHANN AMBROSIUS BARTH
1909.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Einleitung.

Die Theorie der elektromagnetischen, an einem einzelnen Draht fortschreitenden Störungen, wie sie zuerst von Sommerfeld[1]) strenge entwickelt worden ist, beruht auf der Annahme einer allseitigen Symmetrie des Feldes um den Draht, und führt in ihren Resultaten — Fortpflanzung annähernd mit Lichtgeschwindigkeit und sehr geringer Dämpfung — zu einer vollständigen Übereinstimmung mit den seit Hertz bekannten Tatsachen der Erfahrung.

Dies kann insofern überraschen, als die experimentelle Anordnung in mancher Hinsicht von der vorausgesetzten Symmetrie abweicht; nicht nur werden im Lechersystem zwei Drähte einander gegenübergestellt, sondern es erfolgt auch die Anregung durch Funkenstrecke usw. unter Bevorzugung einzelner Richtungen durchaus unsymmetrisch.

Es ist ohne weiteres klar, daß unsymmetrische, elektromagnetische Vorgänge vom Typus der Drahtwellen möglich sein müssen.

Auch was die symmetrischen Vorgänge betrifft, so läßt Sommerfeld[2]) die Möglichkeit offen, daß die von ihm betrachteten Lösungen nicht die einzigen sind. Trotzdem müssen jene symmetrischen Lösungen vor den übrigen etwa vorhandenen symmetrischen oder unsymmetrischen derart bevorzugt sein, daß sie den Charakter des experimentellen Vorganges allein bestimmen.

Als Grund hierfür wird man die Dämpfungsverhältnisse vermuten, die bei dem bevorzugten symmetrischen Wellentypus sehr günstig liegen — hier wird die Wellenamplitude erst

1) A. Sommerfeld, Wied. Ann. 67. p. 233. 1899.
2) l. c. p. 289.

nach Zurücklegung eines nach Kilometern messenden Weges erheblich heruntergesetzt — die aber bei den hinzukommenden symmetrischen oder unsymmetrischen Wellen möglicherweise ganz andere sind.

Es ist die Aufgabe der vorliegenden Arbeit, diese weiteren Wellentypen aufzusuchen und ihre Fortpflanzungs- und Dämpfungsverhältnisse zu diskutieren.

Um diesen Zweck zu erreichen, legen wir nicht Sommerfelds speziellen symmetrischen Ansatz zugrunde, sondern gehen auf die allgemeinen von drei Koordinaten abhängigen Differentialgleichungen zurück, und versuchen die Maxwellschen Gleichungen zu integrieren, indem wir eine harmonische Abhängigkeit des Feldes vom Azimut annehmen.

Wir erhalten somit einen allgemeinen unsymmetrischen Wellentypus, der auf zwei verschiedene Arten zu einem symmetrischen spezialisiert werden kann.

Wir haben erstens eine symmetrische Welle, bei der die elektrische Kraft in den Meridianebenen, die magnetische in Parallelkreisen verläuft, wie bei den gewöhnlichen bekannten Drahtwellen. Diesen Wellentypus wollen wir den elektrischen nennen.

Zweitens einen ebenfalls symmetrischen Typus, bei dem die elektrische Kraft in Parallelkreisen, die magnetische in Meridianebenen verläuft, und den wir den magnetischen nennen.

In beiden symmetrischen Wellentypen sind nur je drei Komponenten der elektromagnetischen Feldstärke von Null verschieden.

Im dritten allgemeinen unsymmetrischen Typus sind dagegen alle sechs Feldkomponenten vorhanden.

Neben dieser, auf der allgemeinen vektoriellen Struktur des Feldes beruhenden Unterscheidung wollen wir eine zweite treffen, die sich auf die Fortpflanzungsverhältnisse gründet.

Wir bezeichnen als Hauptwelle einen periodischen Vorgang, der mit geringer Dämpfung fortschreitet, und zwar mit um so geringerer, je größer die Leitfähigkeit des Drahtes ist.

Als Nebenwelle einen solchen, bei dem die Dämpfung beträchtlich ist und durch Erhöhung der Leitfähigkeit nicht verkleinert werden kann.

Wir werden nun sehen, daß die einzigen Hauptwellen dem ersten Typus (symmetrische elektrische Wellen) angehören und durch die Sommerfeldschen Lösungen gegeben sind.

Allen drei Typen sind dagegen Nebenwellen eigen, und zwar gibt es eine sehr große Anzahl von verschiedenen Nebenwellen, die sich zu je einer nur durch gewisse Realitätsbetrachtungen begrenzten Serie zusammenordnen.

Die symmetrischen Serien bestehen aus einzelnen Wellen, die unsymmetrischen aus Paaren, die man aus der Koppelung des elektrischen und magnetischen Typus erklären kann.

Außer der großen Dämpfung zeigen die Nebenwellen auch in bezug auf den Skineffekt ein eigentümliches Verhalten.

Während nämlich bei der Hauptwelle das Feld im Außenraume in radialer Richtung langsam abnimmt, gegen das Innere des Drahtes aber sehr stark gedämpft ist, so daß der ganze Vorgang nur in einer äußerst dünnen Oberflächenschicht des Drahtes vor sich geht, stellt sich bei den Nebenwellen gewissermaßen im Außenraume ein Skineffekt ein, im Innern des Drahtes dagegen ist die radiale Abnahme sehr gering, und daher die Wärmevergeudung sehr groß, woraus sich die außerordentlich starke Dämpfung unmittelbar erklärt.

Sowohl bei den Haupt- wie bei den Nebenwellen ist der innere bzw. äußere Skineffekt um so stärker, je größer die Leitfähigkeit.

Diese Vertauschung der Rollen der beiden Medien tritt noch in mancher Hinsicht in die Erscheinung.

Bei der Hauptwelle, können wir sagen, sind die Eigenschaften des äußeren Mediums für die Fortpflanzung der Welle maßgebend, die des Drahtes selbst liefern nur Korrektionsglieder.

Bei den Nebenwellen ist der Vorgang — Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Dämpfung — hauptsächlich durch die Eigenschaften des Drahtes bestimmt.

Wegen des Verlaufes der Kraftlinien bei den Nebenwellen, welcher demjenigen bei der Hauptwelle durchaus entgegengesetzt ist, verweisen wir auf die Figuren von p. 936, 937 und die anschließenden Erläuterungen.

Die Fig. 4 zeigt, daß die Kraftlinien im Äußeren, und zwar die magnetischen so gut wie die elektrischen, durch-

schnittlich unter 45^0 gegen die Drahtoberfläche voraneilen, (während sie bei der Hauptwelle fast senkrecht stehen, und um so weniger im Sinne des Voraneilens von der senkrechten Lage abweichen, je größer die Leitfähigkeit ist), daß sie im Inneren durchschnittlich nahezu senkrecht stehen, d. h. hinter dieser Stellung nur in zweiter Ordnung zurückbleiben (während bei der Hauptwelle die Kraftlinien im Draht fast parallel zur Oberfläche nachschleifen).

Im übrigen zeigt der Anblick der Figg. 5 und 6 die Unterteilung des Feldes in kongruente Gebiete entsprechend der harmonischen Abhängigkeit desselben vom Azimut.

Die Untersuchung ist bis zur numerischen Berechnung von Phasengeschwindigkeit und Dämpfung durchgeführt. Z. B. ergibt sich bei einem 4 mm dicken Kupferdrahte für eine der ersten Nebenwellen aus irgend einer unserer Serien Abdämpfung auf $1/e$ nach dem Wege von 0,002 mm, und eine Geschwindigkeit von ca. 12,5 km/sec $= c \,.\, 4{,}1 \,.\, 10^{-5}$, dagegen bei der Hauptwelle nach Sommerfeld für die entsprechende Weglänge und Geschwindigkeit 1,6 km bzw. $c\{1 - 3 \,.\, 10^{-5}\}$.

Voraussetzung für unsere Wellentypen ist, daß der Energiefluß im Unendlichen verschwindet, die Energie sich also längs des Drahtes fortpflanzt bzw. in demselben als Joulesche Wärme verzehrt wird.

Neben diesen Drahtwellen im eigentlichen Sinne sind aber auch solche Vorgänge von Interesse, welche mit Ein- oder Ausstrahlung verbunden sind.

Es wird sich zeigen, daß im ersten Falle die Störung längs des Drahtes ungedämpft und mit Überlichtgeschwindigkeit fortschreitet, im zweiten Falle ist der Vorgang in der Achsenrichtung aperiodisch gedämpft.

Übrigens bildet die Mannigfaltigkeit dieser Lösungen eine kontinuierliche Folge, nicht wie die der vorher betrachteten Nebenwellen eine diskrete Serie.

Den Ausgangspunkt für diese Untersuchungen bildete die Frage nach der Ausstrahlung eines Drahtwellenzuges beim Passieren eines Knickes der Leitung. Um für die strenge Lösung dieses (wie sich zeigte sehr schwierigen) Problems die nötigen Partikularlösungen bereit zu stellen, wurden die hier besprochenen allgemeinen Wellentypen entwickelt, deren Haupt-

interesse in ihrer Bedeutung für eine allgemeine Theorie der Drahtwellen liegen dürfte. Außerdem werden sie als mathematische Hilfsmittel nicht nur bei dem genannten Problem eines Knickes, sondern überall da in Frage kommen, wo es sich darum handelt, strenge Lösungen der Maxwellschen Gleichungen von Zylindersymmetrie aus Partikularlösungen zusammenzufügen.

§ 1. Zurückführung der beiden elektromagnetischen Vektoren auf einen einzigen Vektor.

Die Maxwellschen Gleichungen lauten bei Ausschließung von Ladungen in sog. modifizierten Einheiten[1])

$$\frac{\varepsilon}{c}\dot{\mathfrak{E}} + \frac{\sigma}{c}\mathfrak{E} = \operatorname{rot}\mathfrak{H}\,.$$

$$\frac{\mu}{c}\dot{\mathfrak{H}} \qquad\qquad = -\operatorname{rot}\mathfrak{E}\,,$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0\,, \quad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0\,,$$

oder in symbolischer Schreibweise

$$(1)\qquad \begin{cases} \text{a)} & S\mathfrak{E} = \operatorname{rot}\mathfrak{H}\,, \\ \text{b)} & T\mathfrak{H} = -\operatorname{rot}\mathfrak{E}\,, \\ \text{c)} & \operatorname{div}\mathfrak{E} = 0\,, \\ \text{d)} & \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0\,, \end{cases}$$

wobei

$$(2)\qquad S = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma}{c}\,, \quad T = \frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,.$$

Die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ drücken wir durch einen dritten Vektor $\mathfrak{P}$ aus, den wir nach Abraham[2]) den verallgemeinerten Hertzschen Vektor nennen.

Es ist allerdings zu bemerken, daß bei Abraham der Hertzsche Vektor durch ein Integral gegeben wird, indem die Elektrizitätsströmung als bekannt vorausgesetzt wird, hier dagegen durch eine Differentialgleichung.

---

1) Vgl. H. A. Lorenz, Enz. d. math. Wissensch. **5.** p. 13. Nr. 7.

2) M. Abraham, Elektrizität. II. (1908) Gleichung (48). $\mathfrak{P}$ (bei Abraham mit $\mathfrak{Z}$ bezeichnet) ist die vektorielle Verallgemeinerung der Hertzschen Potentialfunktion *II*.

Wir setzen also an:

$$(3)\qquad \begin{cases} \text{a)} & \mathfrak{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{P} - S T \mathfrak{P}, \\ \text{b)} & \mathfrak{H} = \operatorname{rot} S \mathfrak{P}. \end{cases}$$

Durch diesen Ansatz werden die Gleichungen (1 b, d) unmittelbar erfüllt.

Aus (1 a) erhalten wir für $\mathfrak{P}$ die Differentialgleichung

$$S\{\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{P} - S T \mathfrak{P}\} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} S \mathfrak{P}$$

oder auch:

$$(4)\qquad \{\operatorname{grad}\operatorname{div} - \operatorname{rot}\operatorname{rot} - S T\}\mathfrak{P} = 0.$$

Gleichung (1 c) wird alsdann identisch erfüllt, wenn anfangs keine Ladungen vorhanden sind.

Setzen wir reine zeitliche Periodizität voraus in der Form

$$(5)\qquad \mathfrak{P} = e^{-i\omega t}\mathfrak{Q}, \quad \omega \text{ reell } > 0$$

so erhalten wir aus (4)

$$(6)\qquad \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{Q} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{Q} + k^2\mathfrak{Q} = 0,$$

wobei

$$(7)\qquad k^2 = \frac{\mu\varepsilon\omega^2 + i\sigma\mu\omega}{c^2}.$$

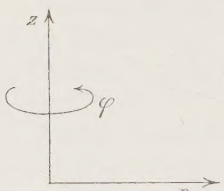

Fig. 1.

Wir führen Zylinderkoordinaten z, r, φ ein und erhalten aus (6) für die Komponenten von $\mathfrak{Q}$

$$\mathfrak{Q}_z = Z, \quad \mathfrak{Q}_r = R, \quad \mathfrak{Q}_\varphi = \Phi$$

folgende partielle Differentialgleichungen:

$$(8)\qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial \varphi^2} + k^2 Z = 0,$$

$$(9)\qquad \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial r R}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2} + k^2 R - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0,$$

$$(10)\qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial r \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + k^2 \Phi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0.$$

§ 2. Integration der Differentialgleichungen.

Um eine partikuläre Lösung der Gleichungen (8), (9), (10) zu finden, machen wir den Ansatz:

$$(11)\qquad \begin{cases} Z = e^{i\lambda z}\cos n\varphi\, Z', \\ R = e^{i\lambda z}\cos n\varphi\, R', \\ \Phi = e^{i\lambda z}\sin n\varphi\, \Phi', \end{cases}$$

Aus (8) erhalten wir dann

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dZ'}{dr}+\left\{k^2-\lambda^2-\frac{n^2}{r^2}\right\}Z'=0.$$

Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung ist:

$$Z'=\alpha_n C_n\left(\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r\right), \tag{12}$$

wobei $C_n(x)$ eine allgemeine Zylinderfunktion vom Index n und dem Argument x ist.

Aus (9) und (10) ergibt sich ferner:

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{drR'}{dr}+\left(k^2-\lambda^2-\frac{n^2}{r^2}\right)R'-\frac{2n}{r^2}\Phi'=0,$$

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dr\Phi'}{dr}+\left(k^2-\lambda^2-\frac{n^2}{r^2}\right)\Phi'-\frac{2n}{r^2}R'=0.$$

Durch Addition bzw. Subtraktion dieser Gleichungen erhalten wir, indem wir noch

$$\begin{cases}\Phi'+R'=P,\\ \Phi'-R'=Q\end{cases} \tag{13}$$

setzen, folgende zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{drP}{dr}+\left\{k^2-\lambda^2-\frac{n^2+2n}{r^2}\right\}P=0,$$

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{drQ}{dr}+\left\{k^2-\lambda^2-\frac{n^2-2n}{r^2}\right\}Q=0,$$

oder

$$\frac{d^2P}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dP}{dr}+\left\{k^2-\lambda^2-\frac{(n+1)^2}{r^2}\right\}P=0,$$

$$\frac{d^2Q}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dQ}{dr}+\left\{k^2-\lambda^2-\frac{(n-1)^2}{r^2}\right\}Q=0.$$

Daraus:

$$\begin{cases}Q=-2\beta_n C_{n-1}\left(\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r\right),\\ P=\;\;2\gamma_n C_{n+1}\left(\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r\right).\end{cases} \tag{13a}$$

Für Φ' und R' selbst erhalten wir also aus (13) und (13a):

$$\begin{cases}R'=\;\;\beta_n C_{n-1}\left(\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r\right)+\gamma_n C_{n+1}\left(\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r\right),\\ \Phi'=-\beta_n C_{n-1}\left(\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r\right)+\gamma_n C_{n+1}\left(\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r\right).\end{cases} \tag{13b}$$

Aus den so gefundenen Komponenten von $\mathfrak{Q}$ lassen sich nach (3) und (5) die Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ berechnen.

Es ist nämlich bis auf den Faktor $e^{-i\omega t}$

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{E}_z &= \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r R}{\partial z\,\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial \varphi} + k^2 Z,\\
\mathfrak{E}_r &= \frac{\partial^2 Z}{\partial z\,\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial r R}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + k^2 R,\\
\mathfrak{E}_\varphi &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2 Z}{\partial z\,\partial \varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 r R}{\partial r\,\partial \varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + k^2 \Phi,\\
\mathfrak{H}_z &= -i\frac{c k^2}{\omega \mu}\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial r \Phi}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial \varphi}\right\},\\
\mathfrak{H}_r &= -i\frac{c k^2}{\omega \mu}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right\},\\
\mathfrak{H}_\varphi &= -i\frac{c k^2}{\omega \mu}\left\{\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial r}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Daraus finden wir, indem wir zur Vereinfachung der Ausdrücke die Funktionalgleichungen der Zylinderfunktionen

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
C_n'(x) &= -\frac{n}{x}C_n(x) + C_{n-1}(x),\\
C_n'(x) &= +\frac{n}{x}C_n(x) - C_{n+1}(x)
\end{aligned}\right.$$

in Betracht ziehen,[1]) folgende Ausdrücke für die Feldkomponenten

$$(16)\quad \left.\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{E}_z &= \cos n\varphi\,\sqrt{k^2-\lambda^2}\,\lambda\,\delta_n C_n\left(\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r\right)\\
\mathfrak{E}_r &= \cos n\varphi\left\{i\lambda^2\delta_n C_n' + \frac{n k^2}{r\sqrt{k^2-\lambda^2}}\varepsilon_n C_n\right\}\\
\mathfrak{E}_\varphi &= -\sin n\varphi\left\{\frac{i n \lambda^2}{r\sqrt{k^2-\lambda^2}}\delta_n C_n + k^2\varepsilon_n C_n'\right\}\\
\mathfrak{H}_z &= -\sin n\varphi\,\frac{i c k^2}{\omega\mu}\sqrt{k^2-\lambda^2}\,\varepsilon_n C_n\\
\mathfrak{H}_r &= \sin n\varphi\,\frac{i c k^2}{\omega\mu}\lambda\left\{\frac{n}{r\sqrt{k^2-\lambda^2}}\delta_n C_n - i\varepsilon_n C_n'\right\}\\
\mathfrak{H}_\varphi &= \cos n\varphi\,\frac{i c k^2}{\omega\mu}\lambda\left\{\delta_n C_n' - \frac{i n}{r\sqrt{k^2-\lambda^2}}\varepsilon_n C_n\right\}
\end{aligned}\right.\right\} e^{i\lambda z - i\omega t},$$

wobei

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta_n &= \frac{\alpha_n\sqrt{k^2-\lambda^2}}{\lambda} - i(\beta_n - \gamma_n),\\
\varepsilon_n &= \beta_n + \gamma_n.
\end{aligned}\right.$$

1) Die etwas weitläufigen Zwischenrechnungen gebe ich in einem Anhang an.

Sämtliche in den Ausdrücken (16) vorkommenden Zylinderfunktionen haben das Argument $\sqrt{k^2 - \lambda^2}\, r$. Die Akzente bedeuten die Ableitungen nach dem Argument.

Bemerkenswert ist, daß unsere ursprünglichen drei Konstanten α_n, β_n, γ_n in den endgültigen Ausdrücken (16) nur in den zwei Verbindungen δ_n und ε_n auftreten, sie haben sich also auf nur zwei reduziert.

Machen wir statt (11) in den Gleichungen (8), (9), (10) den Ansatz

$$\begin{aligned} Z &= e^{i\lambda z} \sin n\varphi\, Z'', \\ R &= e^{i\lambda z} \sin n\varphi\, R'', \\ \Phi &= e^{i\lambda z} \cos n\varphi\, \Phi'', \end{aligned}$$

so erhalten wir in ähnlicher Weise

$$\begin{aligned} Z'' &= \alpha_n' C_n\left(\sqrt{k^2 - \lambda^2}\, r\right), \\ R'' &= \beta_n' C_{n-1} + \gamma_n' C_{n+1}, \\ \Phi'' &= -\beta_n' C_{n-1} + \gamma_n' C_{n+1}, \end{aligned}$$

und daraus:

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{E}_z &= \sin n\varphi \sqrt{k^2 - \lambda^2}\, \lambda\, \delta_n' C_n\left(\sqrt{k^2 - \lambda^2}\, r\right) \\ \mathfrak{E}_r &= \sin n\varphi \left\{ i\lambda^2 \delta_n' C_n' + \frac{n k^2}{r\sqrt{k^2 - \lambda^2}} \varepsilon_n' C_n \right\} \\ \mathfrak{E}_\varphi &= \cos n\varphi \left\{ \frac{i n \lambda^2}{r\sqrt{k^2 - \lambda^2}} \delta_n' C_n + k^2 \varepsilon_n' C_n' \right\} \\ \mathfrak{H}_z &= \cos n\varphi \frac{i c k^2}{\omega \mu} \sqrt{k^2 - \lambda^2}\, \varepsilon_n' C_n \\ \mathfrak{H}_r &= -\cos n\varphi \frac{i c k^2}{\omega \mu} \lambda \left\{ \frac{n}{r\sqrt{k^2 - \lambda^2}} \delta_n' C_n - i \varepsilon_n' C_n' \right\} \\ \mathfrak{H}_\varphi &= \sin n\varphi \frac{i c k^2}{\omega \mu} \lambda \left\{ \delta_n' C_n' - \frac{i n}{r\sqrt{k^2 - \lambda^2}} \varepsilon_n' C_n \right\} \end{aligned}\right\} e^{i\lambda z - i\omega t},$$

wobei wieder:

$$\begin{aligned} \delta_n' &= \frac{\alpha_n' \sqrt{k^2 - \lambda^2}}{\lambda} - i(\beta_n' - \gamma_n'), \\ \varepsilon_n' &= \beta_n' + \gamma_n'. \end{aligned}$$

Diese partikulären Lösungen sind die für uns allein in Betracht kommenden.

Aus der Form der Differentialgleichungen (9) und (10) ist nämlich ersichtlich, daß wir R und Φ mit zwei verschiedenen

trigonometrischen Funktionen ansetzen müssen. Es bleiben also nur noch zwei weitere Ansätze übrig:

$$Z = \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} n\varphi\, Z''',$$

$$R = \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} n\varphi\, R''',$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} n\varphi\, \Phi''',$$

durch welche wir die Gleichungen (9) bis (11) lösen könnten, die aber für unser Problem unzulässig sind, da sie zu sich widersprechenden Grenzbedingungen führen würden.

§ 3. Ableitung der transzendenten Gleichung aus den Grenzbedingungen.

Wir betrachten jetzt einen geradlinigen leitenden beiderseits unendlich ausgedehnten Draht (Medium 2) in einem homogenen Dielektrikum oder schlecht leitendem Medium (Medium 1). ε_1, μ_1, k_1^2 seien die Materialkonstanten des Medium 1, ε_2, μ_2, k_2^2 die des Medium 2. Da die Dielektrizitätskonstante ε in den Ausdrücken (16), (18) nicht explizite vorkommt, so wird man sie mit den in denselben vorkommenden Koeffizienten ε_n nicht verwechseln können. Diese Koeffizienten werden wir für das Medium 1 mit großen, für das Medium 2 mit kleinen Buchstaben bezeichnen.

Die Drahtachse wählen wir als die z-Achse unseres Koordinatensystems. Ist ϱ der Drahtradius, so ist

im Medium 1:

$$o \leqq r \leqq \varrho,$$

im Medium 2:

$$\varrho \leqq r < \infty.$$

Im Medium 2, wo r den Wert o annimmt, darf die Zylinderfunktion keine andere als die gewöhnliche Besselsche Funktion sein, weil sie allein im Nullpunkte regulär ist.

Im Medium 1 hätten wir bei *reellem* Argumente die allgemeine Zylinderfunktion mit zwei unabhängigen Konstanten in der Form

$$a J_n + b Y_n,$$

oder, wenn wir die Bezeichnung von Nielsen für die beiden Hankelschen Funktionen übernehmen, damit gleichbedeutend

$$a' H_{1,n} + b' H_{2,n}$$

gebrauchen können.

Bei reellem Argumente verschwinden aber die Zylinderfunktionen im Unendlichen nur wie $r^{-1/2}$, der aus (16) oder (18) zu bildende Poyntingsche Vektor nur wie $1/r$. Der Energiefluß durch die Längeneinheit einer unendlich entfernten Zylinderfläche wäre also im allgemeinen von Null verschieden.[1])

Da wir nun als Drahtwellen nur solche Vorgänge bezeichnen wollen, bei welchen die Energie längs des Drahtes strömt und in ihm als Joulesche Wärme verzehrt wird, die aber mit keinerlei Ein- oder Ausstrahlung im Unendlichen verbunden sind[2]), so werden wir dazu geführt, das Argument der Zylinderfunktionen im Medium 1 als *komplex* anzunehmen.

In diesem Falle aber verschwindet nur entweder die erste oder die zweite Hankelsche Funktion im Unendlichen und zwar exponentiell, jede andere Zylinderfunktion wird unendlich.

Im folgenden werden wir das Vorzeichen von $\sqrt{k_1^2 - \lambda^2}$ so bestimmen, daß der imaginäre Teil positiv wird, und unter H_n ohne zweiten Index die erste Hankelsche Funktion verstehen. Die Feldkomponenten und der Energiefluß verschwinden dann im Unendlichen ebenfalls exponentiell, wir haben also wirkliche Drahtwellen.

λ ist in beiden Medien notwendig dasselbe[3]), und zwar komplex. Die Welle pflanzt sich in der z-Richtung mit einer gewissen Dämpfung fort.

Wir verfügen jetzt über λ und die vier Koeffizienten Δ_n, E_n im Medium 1, δ_n, ε_n im Medium 2. An der Drahtoberfläche, d. h. für $r = \varrho$ haben wir die Stetigkeit von $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{E}_\varphi$, $\mathfrak{H}_z$, $\mathfrak{H}_\varphi$ zu verlangen. Wir erhalten somit vier lineare homogene Gleichungen in Δ, E, δ, ε, durch welche diese bis auf einen

1) Vgl. A. Sommerfeld, l. c. p. 249.

2) Lösungen, die dieser Bedingung nicht genügen, und die wir daher nicht als Drahtwellen bezeichnen, werden in § 10 besprochen werden.

3) Dies folgt unmittelbar aus den Grenzbedingungen, die bei verschiedenem λ nicht für jedes z erfüllt werden könnten. Vgl. A. Sommerfeld, l. c. p. 243.

gemeinsamen Proportionalitätsfaktor sich bestimmen lassen, nachdem wir vorher λ als Wurzel einer transzendenten Gleichung gefunden haben.

Der Übersichtlichkeit halber führen wir die Abkürzungen ein:

$$\sqrt{k_1^2 - \lambda^2}\,\varrho = x, \quad \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}\,\varrho = y. \tag{19}$$

Die Grenzbedingungen lauten dann:

$$\begin{cases} \text{a)} & x\,\Delta_n H_n(x) = y\,\delta_n J_n(y), \\ \text{b)} & \frac{i\,n\,\lambda^2}{x}\,\Delta_n H_n(x) + k_1^2\,\mathsf{E}_n H_n'(x) = \frac{i\,n\,\lambda^2}{y}\,\delta_n J_n(x) + k_2^2\,\varepsilon_n J_n'(y), \\ \text{c)} & \frac{k_1^2}{\mu_1}\,x\,\mathsf{E}_n H_n(x) = \frac{k_2^2}{\mu_2}\,y\,\varepsilon_n J_n(y), \\ \text{d)} & \frac{k_1^2}{\mu_1}\,\Delta_n H_n'(x) - \frac{i\,n}{x}\,\frac{k_1^2}{\mu_1}\,\mathsf{E}_n H_n(x) = \frac{k_2^2}{\mu_2}\,\delta_n J_n'(y) - \frac{i\,n}{y}\,\frac{k_2^2}{\mu_2}\,\varepsilon_n J_n(y). \end{cases} \tag{20}$$

Aus a) erhalten wir:

$$\Delta_n = \frac{a}{x\,H_n(x)}, \quad \delta_n = \frac{a}{y\,J_n(y)} \tag{20e}$$

und aus c)

$$\mathsf{E}_n = \frac{b\,\lambda^2}{x\,H_n(x)}\,\frac{\mu_1}{k_1^2}, \quad \varepsilon_n = \frac{b\,\lambda^2}{y\,J_n(y)}\,\frac{\mu_2}{k_2^2}, \tag{20f}$$

wenn wir mit a, b den gemeinsamen Wert der rechten und linken Seiten der Gleichungen a), c) bezeichnen.

Setzen wir diese Werte in (20b) bzw. (20c) ein, so wird:

$$\begin{cases} \text{a)} & b = a\,.\,i\,n\,\dfrac{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2\,y^2}}{\dfrac{\mu_1}{x}\,\dfrac{H_n'(x)}{H_n(x)} - \dfrac{\mu_2}{y}\,\dfrac{J_n'(y)}{J_n(y)}}, \\ \text{bzw.} & \\ \text{b)} & b = a\,\dfrac{i}{n\,\lambda^2}\,\dfrac{\dfrac{k_1^2}{\mu_1}\,\dfrac{1}{x}\,\dfrac{H_n'(x)}{H_n(x)} - \dfrac{k_2^2}{\mu_2}\,\dfrac{1}{y}\,\dfrac{J_n'(y)}{J_n(y)}}{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2\,y^2}}. \end{cases} \tag{21}$$

Indem wir diese beiden Werte von b einander gleich setzen, erhalten wir eine transzendente Gleichung zur Bestimmung von λ. Dieselbe lautet:

$$\begin{aligned} n^2\,\lambda^2 \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2\,y^2}\right)^2 = {} & \left(\frac{k_1^2}{\mu_1}\,\frac{1}{x}\,\frac{H_n'(x)}{H_n(x)} - \frac{k_2^2}{\mu_2}\,\frac{1}{y}\,\frac{J_n'(y)}{J_n(y)}\right) \\ & \left(\frac{\mu_1}{x}\,\frac{H_n'(x)}{H_n(x)} - \frac{\mu_2}{y}\,\frac{J_n'(y)}{J_n(y)}\right), \end{aligned} \tag{22}$$

x und y haben dabei die in Gleichung (19) gegebene Bedeutung, $H_n(x)$ ist die erste Hankelsche Funktion vom Index n, und das Vorzeichen von x ist so zu wählen, daß sein imaginärer Teil positiv wird.

§ 4. Vorbemerkungen über die allgemeine transzendente Gleichung (22).

Bevor wir zur Diskussion der transzendenten Gleichung schreiten, wollen wir einige Bemerkungen vorausschicken.

Gleichung (22) zeigt ein verschiedenes Verhalten, je nachdem $n = 0$ oder $n > 0$. Für $n = 0$ zerfällt die Gleichung in zwei einfachere

$$\frac{k_1^2}{\mu_1}\frac{1}{x}\frac{H_0'(x)}{H_0(x)} = \frac{k_2^2}{\mu_2}\frac{1}{y}\frac{J'(y)}{J(y)} \tag{23}$$

und

$$\frac{\mu_1}{x}\frac{H_0'(x)}{H_0(x)} = \frac{\mu_2}{y}\frac{J'(y)}{J(y)}. \tag{24}$$

Gleichung (43) entspricht der Partikularlösung (16), in welcher für $n = 0$ nur die Feldkomponenten $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{E}_r$, $\mathfrak{H}_\varphi$ vorhanden sind, Gleichung (44) entspricht der Partikularlösung (18) mit den Feldkomponenten $\mathfrak{E}_\varphi$, $\mathfrak{H}_z$, $\mathfrak{H}_r$. Auch die Partikularlösungen (16) und (18) zeigen ein prinzipiell verschiedenes Verhalten, je nachdem $n = 0$ oder $n > 0$.

Für $n = 0$ nämlich liegt bei (16) die elektrische Kraft in den Meridianebenen und die magnetische bildet Parallelkreise ($\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{E}_r$. $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\varphi$). Das ist der gewöhnliche Typus der Drahtwellen.

Bei (18) dagegen sind die Rollen vertauscht ($\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_\varphi$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_z$, $\mathfrak{H}_r$). Ich will den ersten Typus die elektrische Welle, den zweiten die magnetische nennen.

Für $n = 0$ sind also die beiden Wellen getrennt und für sich existenzfähig, und ihre Diskussion führt zu zwei verschiedenen transzendenten Gleichungen (23) und (24).

Für $n > 0$ sind die beiden Wellen untrennbar miteinander verkoppelt. Die sechs Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ können nur alle zusammen existieren. Die zwei Partikularlösungen (16) und (18) sind eigentlich nur eine Lösung, indem (18) aus (16) durch Drehung der $(\varphi = 0)$-Ebene um $\pi/2n$ entsteht.

So führen auch beide Lösungen (16) und (18) für $n > 0$ zu derselben transzendenten Gleichung, und es wird sich zeigen,

daß die Wurzeln dieser Gleichung paarweise einander nahe liegen, was man als eine Folge der Koppelung der elektrischen und magnetischen Welle betrachten kann.

Von den in unseren Gleichungen vorkommenden Konstanten ist k_1^2 in sehr großer Näherung rein reell und positiv. Wir dürfen nämlich, wo es keine prinzipielle Bedeutung hat, die Leitfähigkeit des Medium I (Luft) ohne weiteres gleich Null setzen, und es wird also:

$$k_1^2 = \frac{\mu_1 \varepsilon_1 \omega^2}{c^2} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2,$$

wobei l die der betrachteten Schwingungszahl entsprechende freie Wellenlänge ist.

k_2^2 ist dagegen angenähert rein imaginär, also

$$(25) \qquad \begin{cases} k_2^2 = 2iR^2, & R > 0, \\ k_2 = (1+i)R. \end{cases}$$

Es ist nämlich

$$k_2^2 = \frac{\mu_2 \varepsilon_2 \omega^2 + i\sigma\mu\omega}{c^2}.$$

Wegen der sehr großen Leitfähigkeit der Metalle ist $\mu_2 \varepsilon_2 \omega^2$ gegen $i\sigma\mu\omega$ verschwindend klein, wenn nicht eben ω sehr große Werte, wie bei Lichtwellen, erreicht, und so ist mit großer Näherung

$$k_2^2 = \frac{i\sigma\mu\omega}{c^2}.$$

Was den Zahlenwert betrifft, so ist $k_1 \varrho$ bei Hertzschen Wellen eine sehr kleine, $k_2 \varrho$ eine sehr große Zahl.

§ 5. Diskussion eines Grenzfalles.

Um einen Überblick über das Verhalten unserer Gleichung zu gewinnen, betrachten wir zunächst den Grenzfall eines unendlich gut leitenden Drahtes. Wir setzen also

$$\sigma_2 = \infty, \quad |k_2^2| = \infty.$$

Die Grenzbedingungen sind in diesem Falle

$$\mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_\varphi = 0 \qquad \text{für } r = \varrho,$$

oder

$$(26) \quad \begin{cases} \sqrt{k_1^2 - \lambda^2}\, \Delta_n H_n(\sqrt{k_1^2 - \lambda^2}\,\varrho) = 0, \\ \dfrac{in\lambda^2}{\varrho\sqrt{k_1^2 - \lambda^2}}\, \Delta_n H_n(\sqrt{k_1^2 - \lambda^2}\,\varrho) + k_1^2 \mathsf{E}_n H_n'(\sqrt{k_1^2 - \lambda^2}\,\varrho) = 0. \end{cases}$$

Für $n=0$ haben wir nur eine Gleichung, nämlich

$$\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,\Delta_0 H_0(\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,\varrho)=0, \tag{27}$$

oder

$$\mathsf{E}_0 H_0'(\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,\varrho)=0, \tag{28}$$

je nachdem wir die Lösung (16) oder (18) betrachten.

Gleichung (27) erfüllen wir, indem wir $\sqrt{k_1^2-\lambda^2}=0$ setzen. Wir erhalten somit eine allerdings degenerierte Lösung, die aber, sobald die Leitfähigkeit endlich wird, zu einer brauchbaren, nämlich der von Sommerfeld gegebenen wird. Die übrigen Gleichungen (26) und (28) können wir durch diese Annahme nicht befriedigen, weil H_n für $n>0$ im Nullpunkte mindestens einen Pol erster Ordnung hat. Die einzige sonst mögliche Lösung der Gleichungen (26) bis (28) ist:

$$H_n(\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,\varrho)=0, \qquad \mathsf{E}_n=0,$$

oder

$$\Delta_n=0, \qquad H_n'(\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,\varrho)=0.$$

Alles reduziert sich also auf die Frage, ob der *Hauptzweig* der ersten Hankelschen Funktionen Nullstellen hat. Nur die Nullstellen dieses Zweiges wären brauchbar, weil sonst das Feld im Unendlichen unendlich sein würde.

Wir ziehen den Greenschen Satz zu Hilfe und zwar für das Gebiet eines Kreisringes von den Radien a und b in der Form:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b (u\,\Delta v - v\,\Delta u) r\,dr = \left[\int_0^{2\pi} r\left(u\frac{\partial v}{\partial r} - v\frac{\partial u}{\partial r}\right) d\varphi\right]_a^b \tag{29}$$

und setzen

$$u = H_{1,n}(\alpha r)\cos n\varphi,$$
$$v = H_{2,n}(\beta r)\cos n\varphi.$$

wobei $H_{1,n}$ $H_{2,n}$ die erste bzw. zweite Hankelsche Funktion vom Index n bedeutet. Dann ist

$$\Delta u = -\alpha^2 H_{1,n}(\alpha r)\cos n\varphi,$$
$$\Delta v = -\beta^2 H_{2,n}(\beta r)\cos n\varphi$$

und der Greensche Satz ergibt, indem wir noch die Beziehung (15) in der Form

$$\frac{d}{d(\alpha r)} H_n(\alpha r) = \frac{n}{\alpha r} H_n(\alpha r) - H_{n+1}(\alpha r) \tag{30}$$

in Betracht ziehen:

$$(31)\quad \begin{aligned}&(\alpha^2-\beta^2)\int_a^b H_{1,n}(\alpha r)\,H_{2,n}(\beta r)\,r\,dr\\&\quad=\Big[\alpha r\,H_{1,n+1}(\alpha r)\,H_{2,n}(\beta r)-\beta r\,H_{1,n}(\alpha r)\,H_{2,n+1}(\beta r)\Big]_a^b.\end{aligned}$$

Wir setzen jetzt

$$a=1,\quad b=\infty.$$

Damit das Integral konvergiert, müssen wir noch festsetzen

$$\begin{aligned}&\text{Im }(\alpha)\quad\text{positiv}\quad\neq 0,\\&\text{Im }(\beta)\quad\text{negativ}\quad\neq 0;\end{aligned}$$

wir erhalten dann aus (31)

$$(32)\quad \begin{aligned}&(\alpha^2-\beta^2)\int_1^\infty H_{1,n}(\alpha r)\,H_{2,n}(\beta r)\,r\,dr\\&\quad=-\alpha\,H_{1,n+1}(\alpha)\,H_{2,n}(\beta)+\beta\,H_{1,n}(\alpha)\,H_{2,n+1}(\beta)\end{aligned}$$

und mit Rücksicht auf (30) auch

$$(33)\quad \begin{aligned}&(\alpha^2-\beta^2)\int_1^\infty H_{1,n}(\alpha r)\,H_{2,n}(\beta r)\,r\,dr\\&\quad=\alpha\,H_{1,n}'(\alpha)\,H_{2,n}(\beta)-\beta\,H_{1,n}(\alpha)\,H_{2,n}'(\beta).\end{aligned}$$

Es sei nun α eine Wurzel von $H_{1,n}$ oder $H_{1,n}'$, und β konjugiert mit α, also $\beta=\bar{\alpha}$. Aus Gleichung (51) des Anhanges ist ersichtlich, daß β eine Wurzel von $H_{2,n}$ bzw. $H_{2,n}'$ sein muß. Ferner sind $H_{1,n}(\alpha r)$ und $H_{2,n}(\beta r)$, $H_{1,n}'(\alpha r)$ und $H_{2,n}'(\beta r)$ bzw. konjugiert. Das Produkt $H_{1,n}(\alpha r)$, $H_{2,n}(\beta r)$ ist also reell und positiv, und das Integral in (32) und (33) von Null verschieden. Sind nun α, β weder rein reell, noch rein imaginär, so ist die linke Seite von (32), (33) von Null verschieden. Ist aber α eine Wurzel von $H_{1,n}$ oder $H_{1,n}'$, so würde die rechte Seite von (32) bzw. (33) gleich Null sein.

Somit haben wir bewiesen, daß die Hauptzweige von $H_{1,n}$ und $H_{2,n}$ keine komplexen Wurzeln haben.

Die reelle Achse interessiert uns zunächst nicht. Erst in § 11 werden wir auf Lösungen mit reellem Argument eingehen.

Es bleibt also nur noch die imaginäre Achse zu untersuchen.

Für $n = 0$ kann man die Nichtexistenz rein imaginärer Nullstellen aus der Greenschen Gleichung für den Einheitskreis um den Nullpunkt direkt nachweisen. Da aber dieses Verfahren für $n > 0$ versagt, so machen wir folgende allgemeine Betrachtung. Durch Ausrechnung von $H_{1,0}(ix)$ und $H_{1,1}(ix)$, wobei x reell > 0, finden wir, daß

$$H_{1,0}(ix) = -if_0(x),$$
$$H_{1,1}(ix) = -f_1(x),$$

wobei $f_0(x)$, $f_1(x)$ reelle, positive nur im Unendlichen und zwar exponentiell verschwindende Funktionen des Argumentes x sind.

Aus der Funktionalgleichung

$$C_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} C_n(x) - C_{n-1}(x)$$

folgt dann unmittelbar, daß:

$$i^n H_{1,n}(ix) = f_n(x),$$

wobei $f_n(x)$ eine f_0 und f_1 ähnliche, also ebenfalls im Endlichen nicht verschwindende Funktion ist. In ähnlicher Weise können wir beweisen, daß auch die Ableitungen $H_{1,n}'$ keine positiv imaginäre Nullstellen haben. *Die einzige Nullstelle des Hauptzweiges von H_n und H_n' ist eine uneigentliche, im Unendlichen gelegene.*

Somit ist bewiesen, daß bei unendlicher Leitfähigkeit des Drahtes Drahtwellen in unserem Sinne unmöglich sind. *Wir haben nur zwei uneigentliche Möglichkeiten, die Gleichungen (34) bis (36) zu befriedigen, indem wir $\lambda = k$, oder $\lambda = \infty$ machen. Erst durch die endliche Leitfähigkeit werden eigentliche Lösungen dieser Gleichungen möglich.*

Zu demselben Resultat gelangen wir auf anderem Wege, wenn wir, statt die aus den speziellen Grenzbedingungen abgeleiteten Gleichungen (26) bis (28) zu betrachten, die allgemeine transzendente Gleichung (22) für den Grenzfall $\sigma_2 = \infty$, $k_2^2 = i\infty$ diskutieren.

Es ist dann bei endlichem λ $y = \varrho k_2$ und (22) wird nach Division durch k_2:

$$\frac{J_n'(y)}{J_n(y)} \left(\frac{\mu_1}{x} \frac{H_n'(x)}{H_n(x)} - \frac{\mu_2}{y} \frac{J_n'(y)}{J_n(y)} \right) = 0.$$

Eine Lösung wäre $J_n'(y) = 0$, also y gleich einer Wurzel von J_n'. Diese Wurzeln sind aber alle reell, und es wäre also

$$|\lambda| = \left|\sqrt{k_2^2 - \frac{y^2}{\varrho^2}}\right| = \left|\sqrt{i\infty - \frac{y^2}{\varrho^2}}\right| = \infty$$

entgegen der Voraussetzung.

Eine andere Lösung von (42) wäre

$$\frac{\mu_1}{x}\frac{H_n'(x)}{H_n(x)} = \frac{\mu_2}{y}\frac{J_n'(y)}{J_n(y)}.$$

Für alle endlichen x bleibt die linke Seite endlich, für $x = 0$ wird sie unendlich. Rechts ist aber $y = \infty$, es muß also $J_n(y) = 0$ sein. Die Wurzeln von $J_n(y)$ sind alle reell, und so ist wieder $\lambda = \infty$.

Nur für $n = 0$ und für die Lösung (16) haben wir die Gleichung

$$\frac{k_1^2}{\mu_1}\frac{1}{x}\frac{H_0'(x)}{H_0(x)} = \frac{k_2^2}{\mu_2}\frac{1}{y}\frac{J_0'(y)}{J_0(y)},$$

also für $k_2 = \infty$

$$\frac{x\,H_0(x)}{H_0'(x)} = 0,$$

welche die Lösung $x = 0$, $\lambda = k_1$ hat.

Damit haben wir die beiden vorher genannten uneigentlichen Lösungsmöglichkeiten wieder gefunden. Wir sehen, daß die Lösung (16) für $n = 0$ (elektrische symmetrische Welle) sich ganz anders wie die übrigen Lösungen verhält. Während nämlich bei den anderen Wellentypen sämtliche Wurzeln der transzendenten Gleichungen ins Unendliche verschwinden, so bleibt bei der elektrischen symmetrischen Welle auch im Falle der unendlich großen Leitfähigkeit eine Wurzel im endlichen, welche uns eine Fortpflanzung mit Lichtgeschwindigkeit liefert.

Aus diesen beiden uneigentlichen Möglichkeiten für $k_2 = \infty$ entwickeln sich die eigentlichen Lösungen bei Endlichem k_2 kontinuierlich: Aus der uneigentlichen Lösung $\lambda = k_1$ entsteht bei endlicher Leitfähigkeit die eine „Hauptwelle“ vom elektrischen symmetrischen Typus, aber auch die Wurzeln aus dem Unendlichen gewinnen bei endlicher Leitfähigkeit eine reale Bedeutung und liefern uns die allen Typen gemeinsamen „Nebenwellenserien“.

§ 6. Die elektrischen (symmetrischen) Wellen.

Elektrische Welle nenne ich, wie schon im § 4 gesagt wurde, die partikuläre Lösung (16) für $n = 0$, also diejenige Lösung der Maxwellschen Gleichungen, bei welcher nur die drei Feldkomponenten $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{E}_r$ und $\mathfrak{H}_\varphi$ von Null verschieden sind.

In diesem Falle haben wir nur mehr zwei Grenzbedingungen, die der Stetigkeit von $\mathfrak{E}_z$ und $\mathfrak{H}_\varphi$ für $r = \varrho$, die zur Gleichung (23) führen.

$$\frac{k_1^2}{\mu_1}\frac{1}{x}\frac{H_0'(x)}{H_0(x)} = \frac{k_2^2}{\mu_2}\frac{1}{y}\frac{J'(y)}{J(y)}. \tag{23}$$

Eine genaue Lösung dieser transzendenten Gleichung wurde von Sommerfeld[1]) folgendermaßen gefunden.

Die experimentelle Tatsache, daß die Phasengeschwindigkeit der beobachteten elektromagnetischen Wellen nahezu gleich der Lichtgeschwindigkeit, und die Dämpfung gering ist, weist darauf hin, daß λ^2 sich von k_1^2 sehr wenig unterscheidet.

$$\lambda \text{ und } x = \sqrt{k_1^2 - \lambda^2}\,\varrho \text{ sind also sehr klein,}$$

$$y = \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}\,\varrho \sim k_2\varrho \text{ sehr groß.}$$

Führen wir in Gleichung (23) die durch die Formeln (50) und (55) des Anhanges gegebenen Näherungswerte ein, so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$z \lg z = x, \tag{34}$$

wobei x eine sehr kleine komplexe Konstante ist. Diese Gleichung hat Sommerfeld durch ein eigentümliches Näherungsverfahren gelöst, und der Lösung entspricht, in Übereinstimmung mit den Beobachtungen, eine Phasengeschwindigkeit, die etwas kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist, und eine sehr geringe örtliche Dämpfung.

Durch besondere Wahl des Drahtes (geringe Leitfähigkeit und sehr kleiner Durchmesser) kann man bewirken, daß bei kleinem x auch y klein wird. Dann haben wir für $J'(y)/J(y)$ den Näherungswert für sehr kleine Argumente einzusetzen. Die ursprüngliche Gleichung reduziert sich wieder auf die Form (34), und der Lösung entspricht eine von der Licht-

1) A. Sommerfeld, Wied. Ann. **67**. p. 233. 1899.

geschwindigkeit etwas mehr abweichende Phasengeschwindigkeit und eine größere Dämpfung.

Diese Lösung wollen wir die Hauptlösung der Gleichung (23) nennen, und auch bei der Diskussion der übrigen transzendenten Gleichungen werden wir unter Hauptlösung eine solche verstehen, für welche x sehr klein ist, d. h. die Phasengeschwindigkeit in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit liegt. und die Dämpfung mäßig ist.

Außer dieser Hauptlösung hat unsere Gleichung eine sehr große Serie von Wurzeln, denen im Sinne des § 3 wirkliche Drahtwellen entsprechen. Diese Wellen würden aber kaum zu beobachten sein, da sie, wie wir sehen werden, ungeheuer gedämpft sind.

Nehmen wir nämlich an, es existieren solche Lösungen der Gleichung (43), für welche y zu einer mäßigen Zahl wird.

Es ist dann:

$$\lambda^2 = k_2^2 - \frac{y^2}{\varrho^2}, \quad x = \varrho \sqrt{k_1^2 - \lambda^2},$$

und da wir k_1^2 gegen k_2^2 unbedenklich streichen dürfen.

$$x = \varrho \sqrt{-k_2^2 \varrho^2 + y^2}.$$

Gleichung (23) wird bei Berücksichtigung von (57c):

$$\frac{\mu_2 k_1^2}{\mu_1 k_2^2 \sqrt{k_2^2 \varrho^2 - y^2}} = \frac{1}{y} \frac{J'(y)}{J(y)}. \tag{35}$$

Die linke Seite ist eine sehr kleine Zahl, und so reduziert sich unsere Gleichung in erster Näherung auf

$$\begin{matrix} 1 & J'(y) \\ J(y) & J(y) \end{matrix} = 0,$$

oder

$$J'(y) = 0.$$

Sind $w_\varkappa$ die Nullstellen von $J'(y)$, so ist

$$\lambda^2 = k_2^2 - \frac{w_\varkappa^2}{\varrho^2}, \tag{36}$$

wobei der Wert $w_\varkappa = 0$ offenbar auszuschließen ist.

Die Nullstellen $w_\varkappa$ liegen auf der reellen Achse und wachsen mit $\varkappa$ über alle Grenzen. Wenn dabei auch die Annahme eines mäßigen y nicht mehr zutrifft, so sieht man doch aus Gleichung (35), daß auch für sehr große y die Lösungen

der transzendenten Gleichung mit großer Näherung durch die Nullstellen von $J'(y) = 0$ gegeben werden.

Ist nämlich λ sehr groß, sowohl gegen x wie gegen y, so reduziert sich unsere Gleichung auf

$$\frac{J'(y)}{J(y)} = i \frac{k_1^2}{k_2^2} \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k_2^2 \varrho^2}{y^2}}}, \tag{37}$$

oder in erster Näherung wieder

$$J'(y) = 0.$$

Aber nicht allen diesen Wurzeln entsprechen physikalisch mögliche Drahtwellen. Die erste Bedingung nämlich, der die Lösungen der transzendenten Gleichung unterworfen sind, ist, daß sie für x einen Wert mit positiv imaginärem Teile geben.

Schreibt man nun Gleichung (37) in der Grenze für sehr große y in der Form:

$$\operatorname{tg}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = - i \frac{k_1^2 \mu_2}{k_2^2 \mu_1}, \tag{38}$$

und beachtet, daß k_2^2 einen sehr kleinen, aber doch endlichen und zwar positiven reellen Teil hat, so daß die rechte Seite von (37) einen negativ imaginären Teil hat, und ferner, daß der imaginäre Teil von $\operatorname{tg}(x)$ das Vorzeichen des imaginären Teiles des Argumentes hat, so sieht man leicht ein, daß die großen Werte y in Wirklichkeit nicht rein reell, sondern komplex mit negativ imaginärem Teile sind. Da nun bei wachsendem y der Unterschied $x - y$ gegen Null konvergiert[1]), so hat von einem genügend großen Werte y an auch x einen negativ imaginären Teil.

Die erste Hankelsche Funktion wird dann im Unendlichen unendlich, die Lösungen sind also physikalisch unzulässig. Nur eine endliche Anzahl von Lösungen führt zu einem möglichen Vorgang. Wenn hiernach das Abbrechen der Serie nicht in Zweifel gezogen werden kann, so bleibt doch der physikalische Grund davon ziemlich dunkel, um so mehr, als die Stelle des Abbrechens durch die Dielektrizitätskonstante des Drahtes bestimmt wird.

1) Das in sich unbestimmte Vorzeichen von y habe ich derart bestimmt, daß $\lim_{y=\infty}(y - x) = 0$. Bei einer anderen Wahl des Vorzeichens bleibt das Endresultat der Betrachtung ungeändert.

Diese Wellen wollen wir Nebenwellen nennen, und können uns dieselben am besten anschaulich machen, indem wir y durchwegs als reell, k_2^2 als rein imaginär annehmen.

Die Werte

$$\lambda = \sqrt{k_2^2 - \frac{y^2}{\varrho^2}} = \alpha + \beta i$$

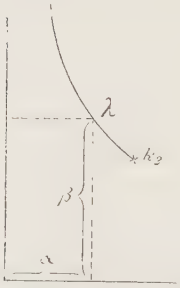

Fig. 2.

liegen in der komplexen Ebene auf dem Halbaste der Hyperbel

$$\alpha\beta = R \quad \left(R = \frac{1}{\sqrt{2}}|k_2|\right),$$

welcher im Punkte $\alpha + \beta i = k_2$ beginnt und die positiv imaginäre Achse zur Asymptote hat.

Die Abhängigkeit des Feldes von z und t ist von der Form

$$e^{-i\omega t + i\lambda z} = e^{-i(\omega t - \alpha z)}\, e^{-\beta z}.$$

Die Phasengeschwindigkeit v wird gegeben durch:

$$v = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{\alpha},$$

ist also dem reellen Teil von λ umgekehrt proportional. Der imaginäre Teil von λ gibt uns direkt die örtliche Dämpfung. Aus dem sehr großen Werte von k_2 ist ersichtlich, daß für die ersten Nebenwellen die Phasengeschwindigkeit sehr gering, die Dämpfung dagegen sehr groß ist. Mit wachsender Ordnungszahl der Welle wird die Geschwindigkeit und auch die Dämpfung immer größer. Schließlich würden sie beide unendlich werden, wenn nicht, wie wir schon gesehen haben, die physikalisch zulässigen Wurzeln im Endlichen abbrächen.

§ 7. Die magnetischen (symmetrischen) Wellen.

Unter diesem Namen verstehen wir die partielle Lösung (18) für $n = 0$, die Lösung also, für welche $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_\varphi$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_z$, $\mathfrak{H}_r$.

Die Grenzbedingungen (Stetigkeit von $\mathfrak{E}_\varphi$ und $\mathfrak{H}_z$ für $r = \varrho$) führen zur transzendenten Gleichung (24):

$$\frac{\mu_1}{x}\frac{H_0'(x)}{H_0(x)} = \frac{\mu_2}{y}\frac{J'(y)}{J(y)}. \tag{24}$$

Zunächst wollen wir untersuchen, ob diese Gleichung eine Hauptlösung in dem im vorigen Paragraphen definierten Sinne hat.

Es sei also x sehr klein, wobei bei gewöhnlicher metallischer Leitung und nicht zu kleinem Durchmesser des Drahtes y groß sein wird.

Unter Anwendung der Formeln (27) und (31) erhalten wir dann aus (44):

$$x^2 \lg \frac{\alpha x}{2} = \pm i k_2 \varrho \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

oder auch

$$\left(\frac{\alpha x}{2}\right)^2 \lg \left(\frac{\alpha x}{2}\right)^2 = \pm i \frac{\alpha^2}{2} k_2 \varrho \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

α ist dabei die durch (53) definierte Zahl, also in der Nähe von $-i$.

Die rechte Seite der Gleichung ist wegen k_2 sehr groß, und es ist ohne weiteres ersichtlich, daß sie von keinem kleinen Werte x erfüllt werden kann, wenn wir unter lg den Hauptlogarithmus verstehen.

Eine Hauptlösung der transzendenten Gleichung existiert nicht.

Da dieser Schluß hier nur aus den Näherungsformeln für kleines x gezogen ist, sei ausdrücklich noch auf § 5 verwiesen, wo wir streng gezeigt haben, daß es keine Lösung der Gleichung geben kann, für die x bei unendlich wachsendem k_2 endlich bleibt. Eine Hauptlösung existiert also auch in diesem erweiterten Sinne nicht, es bleiben nur solche Lösungen, die wir nach § 6 als Nebenwellen zu bezeichnen haben.

Wegen der besonderen Auszeichnung der magnetischen Kraft in diesem Wellentypus ist es nicht ohne Interesse, zu untersuchen, wie die Verhältnisse bei einem Drahte mit großer magnetischer Permeabilität liegen. Es zeigt sich aber, daß auch bei günstigster Wahl des Materiales und der Drahtdimensionen die Verhältnisse sich nicht wesentlich ändern.

Die Serie der Nebenwellen erhalten wir ähnlich wie bei der Gleichung des vorigen Paragraphen.

Es sei nämlich y mäßig, x groß. Setzen wir dann

$$x = i \varrho \lambda = i \varrho k_2, \qquad \frac{H'(x)}{H(x)} = i,$$

so erhalten wir aus (44):

$$\frac{1}{y}\frac{J'(y)}{J(y)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{1}{\varrho k_2}.$$

Rechts steht eine sehr kleine Zahl wegen k_2, und so liegen auch hier wie bei Gleichung (24) die Wurzeln in der Nähe der Nullstellen von $J'(y)$ und es ist also wieder angenähert

$$\lambda^2 = {k_2}^2 - \frac{w_x^2}{\varrho^2}. \tag{39}$$

Bei wachsendem x wächst w_x ins Unendliche. Um zu sehen, ob die Beziehung (49) auch für diesen Grenzfall gilt, nehmen wir y als groß gegen ϱk_2. Es ist dann $x = y$[1]) und Gleichung (44) wird:

$$\frac{J'(y)}{J(y)} = i\frac{\mu_1}{\mu_2},$$

oder

$$\operatorname{tg}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = -i\frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

y hat in diesem Grenzfalle einen negativ imaginären Teil, und da sich x von y unendlich wenig unterscheidet, so sind diese unendlich entfernten Wurzeln auch hier, wie bei den elektrischen symmetrischen Wellen physikalisch unbrauchbar.

Die Serie bricht im endlichen ab; auch sonst verhalten sich diese Nebenwellen, was Dämpfung und Geschwindigkeit anbetrifft, ähnlich wie die elektrischen symmetrischen Nebenwellen.

§ 8. Die unsymmetrischen Wellen.

Betrachten wir jetzt die allgemeine transzendente Gleichung (22) für $n > 0$. Dieselbe lautet:

$$\left| n^2\lambda^2\left(\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}\right)^2 = \begin{pmatrix} k_1^2 & 1 & H_n'(x) \\ \mu_1 & x & H_n(x) \end{pmatrix} - \frac{k_2^2}{\mu_2}\frac{1}{y}\frac{J_n'(y)}{J_n(y)} \right| \left(\frac{\mu_1}{x}\frac{H_n'(x)}{H_n(x)} - \frac{\mu_2}{y}\frac{J_n'(y)}{J_n(y)}\right) \tag{22}$$

und ist für das Verhalten sowohl der partiellen Lösung (16) wie auch der partiellen Lösung (18) maßgebend.

Wir wollen auch hier zunächst untersuchen, ob die Gleichung eine Hauptlösung in unserem Sinne hat.

1) Vgl. die Anmerkung p. 925.

Die Annahme x klein, y groß führt bei Berücksichtigung der Näherungsformeln des Anhangs zur Gleichung:

$$\left(\frac{x^2-y^2}{x^2\,y^2}\right)^4 n^2\,\lambda^2 = \left(-\frac{{k_1}^2}{\mu_1}\frac{n}{x^2}+\frac{k_2}{\mu_2}\frac{i}{\varrho}\right)\left(-\frac{\mu_1}{x^2}n+\frac{\mu_2\,i}{\varrho\,k_2}\right).$$

Streichen wir x^2 gegen y^2 und $\mu_2\,i/\varrho\,k_2$ gegen $\mu_1\,n/x_2$, so erhalten wir:

$$\frac{n^2\,\lambda^2}{x^2} = \frac{{k_1}^2\,n^2}{x^2} - i\,n\,\frac{k_2}{\varrho}\,\frac{\mu_1}{\mu_2},$$

und indem wir den Wert von λ^2

$$\lambda^2 = {k_1}^2 - \frac{x^2}{\varrho^2}$$

einsetzen:

$$n = i\,\varrho\,k_2\,\frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Unsere Annahme hat zu einer widersinnigen Bestimmung von n geführt. Eine unsymmetrische Hauptwelle in unserem Sinne existiert also nicht.

Die Serie der Nebenwellen finden wir genau wie in §§ 6 und 7.

Wir nehmen an, y sei mäßig groß, also $\lambda^2 \sim {k_2}^2$ und $x \sim i\,k_2\,\varrho$.

Indem wir die Näherungsformeln des Anhangs benützen und y gegen x vernachlässigen, erhalten wir aus (22):

$$\frac{n^2\,{k_2}^2}{y^4} = \left(\frac{{k_1}^2\,i}{\mu_1\,x}-\frac{{k_2}^2}{\mu_2}\frac{1}{y}\frac{J'(y)}{J(y)}\right)\left(\frac{\mu_1\,i}{x}-\frac{\mu_2}{y}\frac{J'(y)}{J(y)}\right).$$

In der ersten Klammer dürfen wir das erste Glied, welches sowohl wegen ${k_1}^2$ im Zähler wie auch wegen x im Nenner sehr klein ist, gegen das zweite streichen, allerdings unter der Annahme, daß das zweite Glied nicht auch sehr klein ist, oder daß y nicht ganz dicht neben einer Nullstelle von $J'(y)$ liegt.

In der zweiten Klammer streichen wir unter derselben Annahme das erste Glied gegen das zweite Glied. Somit erhalten wir in erster Näherung

$$\frac{n^2}{y^2} = \left\{\frac{J_n'(y)}{J_n(y)}\right\}^2$$

oder

$$\frac{J_n'(y)}{J_n(y)} = \pm\,\frac{n}{y}, \tag{40}$$

woraus wir zugleich sehen, daß unsere Annahme betreffend y richtig war.

Diese Gleichung lösen wir am bequemsten folgendermaßen:

Aus den Funktionalgleichungen (15) entnehmen wir unmittelbar:

$$\frac{n}{y} + \frac{J_n'(y)}{J_n(y)} = \frac{J_{n-1}(y)}{J_n(y)},$$

$$\frac{n}{y} - \frac{J_n'(y)}{J_n(y)} = \frac{J_{n+1}(y)}{J_n(y)},$$

und so wird Gleichung (40):

$$J_{n\pm1}(y) = 0,$$

wodurch nebenbei bewiesen ist, daß sämtliche Wurzeln der genäherten Gleichung (40) reell sind. y wird also durch die Nullstellen von $J_{n\pm1}$ gegeben.

Nicht so einfach, aber viel lehrreicher ist die graphische Lösung. Da wir jetzt nämlich wissen, daß die Wurzeln reell sind, so konstruieren wir für reelles y die Kurven:

$$Y = \frac{J_n'(y)}{J_n(y)} \quad \text{und} \quad Y = \pm\frac{n}{y}.$$

Die Abszissen ihrer Schnittpunkte sind die gesuchten Lösungen der Gleichung (40).

Die erstere ist eine aus mehreren Ästen bestehende Kurve, welche die Geraden $y = a_{n,k}$, wobei $a_{n,k}$ eine Nullstelle von J_n ist, zu Asymptoten hat und die y-Achse an den Nullstellen von $J'(y)$ schneidet. Für große y verhält sie sich wie

$$-\operatorname{tg}\left(y - \frac{2n+1}{4}\pi\right).$$

Die zwei letzteren sind Hyperbeläste.

Für $n = 4$ z. B. erhalten wir nebenstehende Figur. Die Wurzeln liegen auf der y-Achse je zwei nebeneinander, ein Umstand, den wir schon im § 4 erwähnt haben.

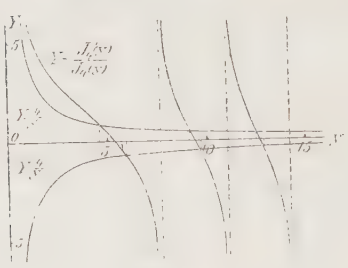

Fig. 3.

Unter Benutzung dieser Näherungswerte könnte man leicht aus der ursprünglichen Gleichung genauere berechnen, was aber zwecklos wäre.

Schließlich wollen wir wie in den zwei vorigen Paragraphen die unendlich fernen Wurzeln bestimmen, indem wir y^2 als groß gegen $k_2{}^2$ annehmen. Es ist dann

$$y = x = i\varrho\lambda,$$

$$\frac{H_n'(x)}{H_n(x)} = i \quad \text{und} \quad x^2 - y^2 = k_1{}^2 - k_2{}^2 = -k_2{}^2.$$

Unsere Gleichung (22) wird:

$$\frac{n^2 k_2{}^4}{\varrho^2 y^4} = \left(\frac{k_1{}^2 i}{\mu_1} - \frac{k_2{}^2}{\mu_2}\frac{J_n'(y)}{J_n(y)}\right)\left(\mu_1 i - \mu_2 \frac{J_n'(y)}{J_n(y)}\right).$$

Im Grenzfalle $y = \infty$ wird die linke Seite gleich Null. Die Gleichung wird erfüllt, indem wir die erste oder zweite Klammer rechts zu Null machen. Wir erhalten also die beiden Gleichungen

$$\frac{J_n'(y)}{J_n(y)} = i\,\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{k_1{}^2}{k_2{}^2}$$

und

$$\frac{J_n'(y)}{J_n(y)} = i\,\frac{\mu_1}{\mu_2},$$

welche den zwei Gleichungen (23) und (24) vollständig analog sind.

Wir können sie auch folgendermaßen schreiben:

$$\operatorname{tg}\left(y - \frac{2n+1}{4}\pi\right) = -i\,\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{k_1{}^2}{k_2{}^2},$$

$$\operatorname{tg}\left(y - \frac{2n+1}{4}\pi\right) = -i\,\frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Daraus ist ersichtlich, wie in den §§ 6 und 7 näher auseinandergesetzt wurde, daß die Wurzeln der ersten Gleichung einen kleinen negativ imaginären Teil haben, die der zweiten sogar einen beträchtlichen. Sie sind also als physikalisch unbrauchbar auszuschließen.

Hieraus folgt zugleich, daß die für kleine y paarweise dicht nebeneinander liegenden Wurzelpaare, bei wachsender Ordnungszahl weiter auseinander rücken.

Die Koppelung der elektrischen und magnetischen Welle, welche für die mäßigen y sehr eng ist, wird nämlich bei wachsender Ordnungszahl der Welle immer lockerer, indem die linke Seite der Gleichung (22), das eigentliche Koppelungsglied der beiden Wellen, immer kleiner wird und schließlich verschwindet.

In bezug auf Dämpfung und Geschwindigkeit verhalten sich die unsymmetrischen Nebenwellen genau wie die symmetrischen.

§ 9. **Numerische Beispiele und graphische Darstellung des Feldes.**

Bei den in diesem Paragraphen behandelten Beispielen knüpfen wir, um den Vergleich zu erleichtern, an die schon erwähnte Arbeit von Sommerfeld an.

Als erstes Beispiel wählen wir einen Kupferdraht von 4 mm Durchmesser bei einer Schwingungsdauer $\tau = 10^{-9}$ sec.

Es ist also:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi \cdot 10^9.$$

Wellenlänge in Luft:

$$l_0 = c \cdot \tau = 30 \text{ cm},$$

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{2\pi}{30}\right)^2 = 4{,}4 \cdot 10^{-2},$$

$$\sigma_2 = 4\pi\,\sigma_{c\,\mathrm{mg}} \cdot c^2 = 4\pi c^2 \cdot 5{,}83 \cdot 10^{-4},$$

$$k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i\sigma\frac{\omega}{c^2} = \frac{4\pi^2}{9 \cdot 10^2} + i\,4\pi \cdot 5{,}83 \cdot 10^{-4} \cdot 2\pi \cdot 10^9$$

$$= i \cdot 2 \cdot (2\pi)^2 \cdot 5{,}83 \cdot 10^5 = 2R^2 i,$$

$$k^2 = (1+i)\,R,$$

wobei

$$R = 5{,}1 \cdot 10^3,$$

$$2R^2 = 5{,}2 \cdot 10^7.$$

Bei diesem Drahte ist λ für die symmetrische elektrische Hauptwelle nach der Berechnung von Sommerfeld[1]) in etwas geänderter Bezeichnung:

$$\lambda = k_1\{1 + 2{,}7 \cdot 10^{-5} - 3\,i\,10^{-5}\}$$

$$= \frac{\omega}{c}\{1 + 2{,}7 \cdot 10^{-5} - 3\,i\,10^{-5}\}.$$

1) A. Sommerfeld, l. c. p. 261. Die Sommerfeldschen Zahlen sind nicht ganz richtig. Doch sind die Fehler, die davon herrühren, daß Sommerfeld in seinen numerischen Rechnungen die Eulersche Konstante mit dem unrichtigen Vorzeichen genommen hat (vgl. W. B. Morton, Nature 63. Nr. 1619. p. 29), so gering, daß ich wohl hier die ursprünglichen Zahlen angeben darf.

Daraus ergibt sich die Phasengeschwindigkeit[1]):

$$V = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{\Re(\lambda)} = \frac{c}{1 + 2{,}7 \cdot 10^{-5}} = c\{1 - 2{,}7 \cdot 10^{-5}\},$$

also nahezu Lichtgeschwindigkeit.

Die Dämpfung ist äußerst gering. Die Welle wird erst nach Zurücklegung eines Weges von $1{,}6 \cdot 10^5$ cm = 1,6 km auf den e^{ten} Teil ihrer Amplitude gedämpft.

Betrachten wir jetzt eine von den Nebenwellen, symmetrische oder unsymmetrische.

Wegen des ungeheuren Wertes von k_2^2 dürfen wir ohne weiteres für die ersten, am wenigsten gedämpften Wellen setzen:

$$\lambda = k_2 = (1 + i)\,R.$$

Die Phasengeschwindigkeit ist:

$$v = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{\Re(\lambda)} = 1{,}23 \cdot 10^6 = c \cdot 4{,}1 \cdot 10^{-5},$$

also kaum $12^1/_2$ km pro Sekunde.

Die Geschwindigkeit selbst ist von derselben Größenordnung wie die Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit bei der Hauptwelle.

Der Dämpfungsfaktor ist $e^{-5{,}1 \cdot 10^3 z}$. Nach Zurücklegung einer Strecke

$$\Delta z = \frac{1}{5{,}1 \cdot 10^3} = 0{,}2 \cdot 10^{-4}\ \text{cm} = 0{,}002\ \text{mm}$$

ist die Welle schon auf $1/e$ gedämpft.

Unter diesen Umständen ist es selbstverständlich, daß die Nebenwellen nicht beobachtet werden.

Wir wollen jetzt den Verlauf der Kraftlinien bestimmen, und zwar für $n \neq 0$.

Da die Kraftlinien Raumkurven sind, so müssen wir ihre Projektionen auf die Ebenen $z\,r$ und $r\,\varphi$ konstruieren.

Zur Koeffizientenbestimmung brauchen wir zunächst die durch die Gleichungen (21 a, b) definierte Größe b. Die beiden Ausdrücke sind vermöge der transzendenten Gleichung identisch. Wir berechnen b aus (21 a).

1) Sommerfeld hat den Ansatz $e^{+i\omega t}$ statt $e^{-i\omega t}$, und so ist bei ihm die Geschwindigkeit negativ.

Indem wir y gegen x streichen, $H_n'(x)/H_n(x)$, $J_n'(y)/J_n(y)$ durch ihre Näherungswerte i, n/y ersetzen und $\mu_1 = \mu_2 = 1$ setzen, erhalten wir:

$$b = a\,i\,\frac{1}{\frac{i\,y^2}{x\,n} - 1} = -\,i\,a\,.$$

In zweiter Näherung ist

$$b = -\,i\,a\{1 + (1 - i)\,\xi\},$$

wobei ξ eine sehr kleine positive Zahl von der Größenordnung $|x|^{-1}$ ist.

Für das Feld außerhalb des Drahtes brauchen wir die Koeffizienten Δ und E, welche nach (20e) zueinander in der Beziehung stehen:

$$\frac{\mathsf{E}}{\Delta} = \frac{b}{a}\,\lambda^2\,\frac{\mu_1}{{k_1}^2} = -\,i\,\frac{{k_2}^2}{{k_1}^2}\,.$$

Da das Argument der in den Ausdrücken (16) vorkommenden Hankelschen Funktionen:

$$\sqrt{{k_1}^2 - \lambda^2}\,r = x\,\frac{r}{\varrho}\,, \quad \varrho \leqq r < \infty$$

sehr groß ist, so dürfen wir die angenäherten Formeln (57) anwenden.

Wir setzen also, da hinreichend genau $x/\varrho = i\,\lambda = (i - 1)\,R$:

$$H_n\left(\sqrt{{k_1}^2 - \lambda^2}\,r\right) = \frac{A}{\sqrt{r}}\,e^{-(1+i)Rr},$$

$$H_n'\left(\sqrt{{k_1}^2 - \lambda^2}\,r\right) = i\,\frac{A}{\sqrt{r}}\,e^{-(1+i)Rr}.$$

In (16) haben wir noch den Faktor $e^{i\lambda z - i\omega t}$. Setzen wir auch hier für λ den angenäherten Wert $(1 + i)\,R$ ein, so erhalten wir als gemeinsamen Faktor der Ausdrücke (16):

$$\frac{A}{\sqrt{r}}\,e^{-i\omega t + (i-1)Rz - (1+i)Rr} = \frac{A}{\sqrt{r}}\,e^{-R(z+r)}\,.\,e^{-i\Phi},$$

wobei

$$\Phi = R(r - z) + \omega\,t\,.$$

A ist eine komplexe Konstante und der Einfachheit halber bestimmen wir Δ aus der Gleichung

$$A\,.\,\Delta = 1\,.$$

So erhalten wir für die Feldkomponenten nach einigen einfachen Rechnungen, indem wir den reellen Dämpfungs-

faktor $e^{-R(z+r)}/\sqrt{r}$ weglassen und zum reellen Teil übergehen, folgende Ausdrücke, in denen w eine Wurzel der Gleichung

$$\frac{J_n'(y)}{J_n(y)} = + \frac{n}{y}$$

bedeutet.

$$\mathfrak{E}_z = - \cos n\varphi \left\{5{,}2 \cdot 10^7 \cos \Phi + 100 \frac{w^2}{4} \sin \Phi\right\}$$

$$\mathfrak{E}_r = - \cos n\varphi \left\{5{,}2 \cdot 10^7 \sin \Phi + \left[\frac{2n+1}{2r} - 5\, w^2\, 10^{-3}\right] 5{,}1 \cdot 10^3 \cos \Phi\right\}.$$

$$\mathfrak{E}_\varphi = - \sin n\varphi \left\{5{,}2 \cdot 10^7 \sin \Phi + \left[\frac{2n+1}{2r} + \xi \cdot 10^4\right] 5{,}1 \cdot 10^3 \cos \Phi\right\}.$$

$$\mathfrak{H}_z = \Omega \cdot \sin n\varphi \{5{,}1 \cdot 10^3 \cos \Phi - 5{,}1 \cdot 10^3 \sin \Phi\},$$

$$\mathfrak{H}_r = \Omega \cdot \sin n\varphi \{5{,}1 \cdot 10^3 \sin \Phi + 5{,}1 \cdot 10^3 \cos \Phi\},$$

$$\mathfrak{H}_\varphi = - \Omega \cdot \cos n\varphi \left\{\frac{n}{r} \sin \Phi + 4{,}4 \cdot 10^{-6} \cos \Phi\right\}.$$

ξ ist, wie schon gesagt, eine positive Größe von der Ordnung 10^{-4}, und

$$\Omega = \frac{2R^2}{4{,}4} \cdot 10^2 \cdot \frac{c k_1^2}{\omega}.$$

Die Kraftlinienbilder konstruieren wir, indem wir für verschiedene Punkte der zr- bzw. $r\varphi$-Ebene die Richtung der in die Ebene fallenden Komponenten der Kraftlinien bestimmen. Wir erhalten nämlich:

$$\frac{\mathfrak{E}_z}{\mathfrak{E}_r} = \frac{1 + \alpha \operatorname{tg} \Phi}{\beta + \operatorname{tg} \Phi}, \qquad \frac{\mathfrak{E}_\varphi}{\mathfrak{E}_r} = \operatorname{tg} n\varphi \frac{\operatorname{tg} \Phi + \gamma}{\operatorname{tg} \Phi + \delta},$$

$$\frac{\mathfrak{H}_z}{\mathfrak{H}_r} = \frac{\operatorname{tg} \Phi + 1}{\operatorname{tg} \Phi - 1}, \qquad \frac{\mathfrak{H}_\varphi}{\mathfrak{H}_r} = - \cot n\varphi \frac{\eta \operatorname{tg} \Phi + \theta}{\operatorname{tg} \Phi - 1},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \vartheta$ sind sehr kleine aus den vorstehenden Werten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ leicht zu berechnende Zahlen.

Es ist wohl überflüssig, die Formeln für das Innere des Drahtes anzugeben. Es sei nur hervorgehoben, daß das Argument der Besselschen Funktionen $y(r/\varrho)$ mit sehr großer Näherung rein reell ist.

Vergleicht man Fig. 4 (Nebenwelle) mit dem von Sommerfeld[1]) gegebenen Kraftliniendiagramm der Hauptwelle, so bemerkt man einen sehr großen Unterschied. Bei Sommerfeld nämlich verlaufen die geradlinigen Kraftlinien im Außenraume fast senkrecht zur Drahtoberfläche, im Inneren des Drahtes dagegen sind sie stark nach hinten geneigt.

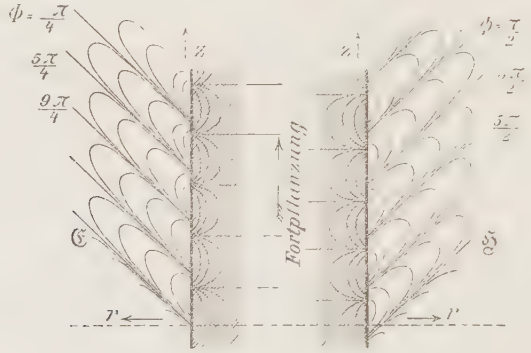

Fig. 4.

In unserem Falle haben wir das Gegenteil. Im Außenraume sind die geradlinigen Kraftlinien nach vorn geneigt, so daß sie mit der Drahtachse einen Winkel von 45° bilden, und im Inneren stehen sie senkrecht zur Oberfläche.

Einen anderen wichtigen Unterschied haben wir in bezug auf das radiale Abnehmen der Feldstärke zu konstatieren.

In der Hauptlösung der symmetrischen elektrischen Gleichung ist nämlich x klein, y sehr groß und komplex. Im Außenraume, wo wir die Funktionen $H_{1,n}$, $H_{1,n}'$ mit dem Argument $x(r/\varrho)$ haben, ist die radiale Abnahme des Feldes sehr gering. Im Inneren haben wir Besselsche Funktionen mit dem Argument $y(r/\varrho)$, und die Feldkomponenten haben in der Nähe der Drahtoberfläche, wo wir die Näherungsformeln für große Argumente anwenden dürfen, den gemeinsamen Faktor:

$$e^{-R(\varrho - r)},$$

wobei

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} |k_2| .$$

1) l. c. p. 285.

(Das ϱ im Exponenten kommt vom Koeffizienten her). Wir sehen daraus, daß das Feld nach dem Inneren des Drahtes zu mit großer Schnelligkeit exponentiell abnimmt, der ganze Vorgang beschränkt sich auf eine sehr dünne Oberflächenschicht des Drahtes. Dies ist der bekannte Skineffekt.[1])

Die Nebenwellen verhalten sich auch in dieser Beziehung ganz anders.

x ist jetzt groß und komplex, y mäßig und reell. Die beiden Medien haben sozusagen ihre Rollen vertauscht. Im Außenraume nimmt das Feld radial wie $H\left(x\frac{r}{\varrho}\right)$ ab, d. h. wie e^{-Rr}, genau wie bei der Hauptwelle im Inneren.

Im Inneren des Drahtes dagegen ist das Argument der Besselschen Funktionen nahezu reell, die Funktionen ver-

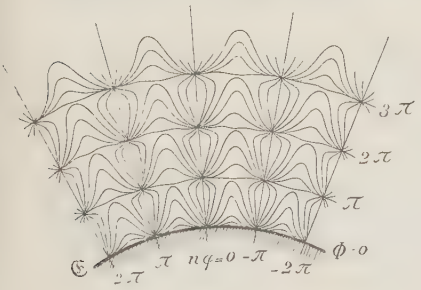

Fig. 5.

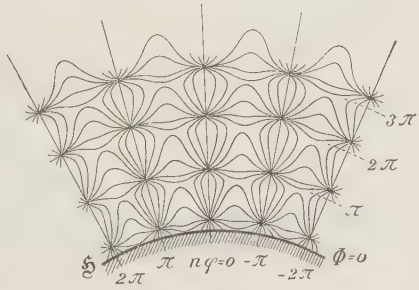

Fig. 6.

halten sich der Hauptsache nach wie trigonometrische Funktionen. Der Skineffekt fällt gänzlich aus. Man kann die Sache vielleicht so erklären, daß wegen der recht geringen Fortpflanzungsgeschwindigkeit das Feld Zeit genug hat in das Innere des Drahtes einzudringen. Die eigentliche Erklärung aber liegt in der Gleichberechtigung der beiden Medien.

Bei der Hauptwelle sind die Eigenschaften des umgebenden Mediums hauptsächlich für den Vorgang maßgebend, bei den Nebenwellen die des Drahtes selbst. Man muß sich vorstellen, daß unsere Diagramme 3 sich mit konstanter Geschwindigkeit im Sinne des Fortpflanzungspfeiles fortschieben, wobei sie die mehrfach hervorgehobene starke Dämpfung er-

1) Vgl. A. Sommerfeld, l. c. p. 278.

leiden. Beide Diagramme entsprechen demselben Zeitpunkt. Die Phasen von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ sind also dauernd um eine viertel Wellenlänge gegeneinander verschoben.

Die Figg. 5 und 6 zeigen zunächst die Unterteilung des Feldes in eine hier groß gewählte Anzahl n von gleichen Segmenten; sie sind speziell für diejenige Ebene r, φ konstruiert, die in Fig. 4 durch die punktierte Linie angedeutet ist. Die Phasenverschiebung der $\mathfrak{E}$- und $\mathfrak{H}$-Linien kommt auch hier zum Ausdruck. Beide Diagramme wandern mit der Zeit nach dem Inneren des Drahtes hin.

Ich möchte noch dazu bemerken, daß sie nur scheinbar der Divergenzbedingung widersprechen. Man muß nämlich nicht vergessen, daß die gezeichneten Kurven keine Kraftlinien sind, sondern die Projektionen von Elementen verschiedener Kraftlinien.

Wir wollen kurz für ein zweites Beispiel Geschwindigkeit und Dämpfung der Nebenwellen bestimmen, um noch einen Unterschied zwischen Nebenwellen und Hauptwellen hervorzuheben.

Wir knüpfen an das zweite, dritte und vierte Beispiel von Sommerfeld[1]) an und betrachten Platindrähte von $^4/_{1000}$, $^4/_{100}$ bzw. $^4/_{10}$ mm Durchmesser bei einer Schwingungsdauer

$$\tau = \tfrac{1}{3}\, 10^{-8}.$$

In diesem Falle ist

$$\omega = 1{,}91 \,.\, 10^9, \quad k_2 = (1 + i)\, 4\pi \,.\, 144.$$

Als Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit findet Sommerfeld im ersten Falle $0{,}25 \,.\, c = 75000$ km, in den übrigen 3000 km bzw. 300 km.

Die Wellen werden auf den e^{ten} Teil ihrer Amplitude gedämpft nach Zurücklegung eines Weges von 16,5 cm, bzw. 10 m und 114 m.

Betrachten wir die erste symmetrische elektrische Nebenwelle.

Wir haben y gleich einer Wurzel von J_0' zu setzen. Die erste Nullstelle von J_0' ist $w = 3{,}83$.

1) l. c. p. 266, 269.

Es ist also für die erste Nebenwelle:

$$\lambda^2 = k_2{}^2 - \left(\frac{3{,}83}{\varrho}\right)^2.$$

I. $\varrho = \frac{2}{1000}$ mm $= 2 \cdot 10^{-4}$ cm:

$$\lambda^2 = (1+i)\,1{,}81 \cdot 10^3 - \left\{\frac{3{,}83}{2}\right\}^2 \cdot 10^8$$
$$= -\left\{\frac{3{,}83}{2}\right\}^2 \cdot 10^8 \{1 - (1+i)\,5 \cdot 10^{-6}\},$$
$$\lambda = i\,\frac{3{,}83}{2} \cdot 10^4 \{1 - (1+i)\,2{,}5 \cdot 10^{-6}\},$$
$$x = \sqrt{k_1{}^2 - \lambda^2} = i\,\lambda = \frac{3{,}83}{2}\,10^4 \{-1 + (1+i)\,2{,}5 \cdot 10^{-6}\}.$$

x hat einen positiv imaginären Teil, die Lösung ist physikalisch möglich. Geschwindigkeit:

$$V = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\Re(\lambda)} = \frac{1{,}91 \cdot 10^9}{\frac{3{,}83}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}} = \frac{10^{11}}{2{,}5} = 4 \cdot 10^{10}.$$

Die Phasengeschwindigkeit längs des Drahtes ist Überlichtgeschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit ist aber nicht die wirkliche Geschwindigkeit des Energieflusses sondern größer, wegen der Neigung der Kraftlinien. Die wirkliche Phasengeschwindigkeit ist

$$v \cdot \sin 45^0 = \frac{v}{\sqrt{2}} = 2{,}82 \cdot 10^{10},$$

also Unterlichtgeschwindigkeit.

Der Dämpfungsfaktor ist

$$e^{-\frac{3{,}83}{2}\,10^4 z}.$$

Die Welle wird nach Zurücklegung der Strecke

$$\Delta z = \frac{2}{3{,}83} \cdot 10^{-4} = 5{,}15 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$$

auf $1/e$ gedämpft.

II. $\varrho = \frac{2}{100}$ mm $= 2 \cdot 10^{-3}$ cm:

$$\lambda^2 = (1+i)\,1{,}81 \cdot 10^3 - \left(\frac{3{,}83}{2}\right)^2 \cdot 10^6$$
$$= -(1{,}91)^2 \cdot 10^6 \{1 - (1+i)\,5 \cdot 10^{-4}\},$$

$$\lambda = i\,.\,1{,}91\,.\,10^{3}\{1-(1+i)\,2{,}5\,.\,10^{-4}\},$$
$$x = i\lambda = 1{,}91\,.\,10^{3}\{-1+(1+i)\,2{,}5\,.\,10^{-4}\},$$
$$V = \frac{\omega}{\Re(\lambda)} = \frac{1{,}91\,.\,10^{9}}{1{,}91\,.\,2.5\,.\,10^{-1}} = 4\,.\,10^{9},$$

Dämpfungsfaktor: $e^{-1{,}91\,.\,10^{3}}$, also

$$\Delta z = \frac{10^{-3}}{1{,}91} = 5{,}15\,.\,10^{-4}\ \text{cm}.$$

III. $\varrho = \frac{2}{10}\ \text{mm} = 2\,.\,10^{-2}\ \text{cm}$:

$$\lambda^2 = (1+i)\,1{,}81\,.\,10^{3} - \left(\frac{3{,}83}{2}\right)^2 .\,10^{4}$$
$$= -\,(1{,}91)^2\,.\,10^{4}\{1-(1+i)\,5\,.\,10^{-2}\},$$
$$\lambda = i\,1{,}91\,.\,10^{2}\{1-(1+i)\,.\,2{,}5\,.\,10^{-2}\},$$
$$x = i\lambda = 1{,}91\,.\,10^{2}\{-1+(1+i)\,.\,2{,}5\,.\,10^{-2}\},$$
$$V = \frac{\omega}{\Re(\lambda)} = \frac{1{,}91\,.\,10^{9}}{1{,}91\,.\,2{,}5} = 4\,.\,10^{8},$$

Dämpfungsfaktor: $e^{-1{,}91\,.\,10^{2}z}$, also

$$\Delta z = \frac{10^{-2}}{1{,}91} = 5{,}15\,.\,10^{-3}\ \text{cm}.$$

Die numerischen Resultate fassen wir in folgender Tabelle zusammen.

		Hauptwelle		
		V	Δz	$Jm(y)$
$\tau = 10^{-9}$	Cu $\varrho = 0{,}2$	$c\{1-3\,.\,10^{-5}\}$	$1{,}6\,.\,10^{5}$	$i\ 5{,}1\,.\,10^{3}$
$\tau = \frac{1}{3}10^{-8}$	Pt $\varrho = 0{,}02$	$c\{1-10^{-3}\}$	$1{,}1\,.\,10^{4}$	$i\ 4{,}8$
	„ $\varrho = 0{,}002$	$c\{1-10^{-2}\}$	$1\ \ .\,10^{3}$	$i\ 4{,}8\,.\,10^{-1}$
	„ $\varrho = 0{,}0002$	$c\{1-2{,}5\,.\,10^{-3}\}$	$1{,}6\,.\,10$	$i\ 4{,}8\,.\,10^{-2}$

		Nebenwelle		
		V	Δz	$Jm(x)$
$\tau = 10^{-9}$	Cu $\varrho = 0{,}2$	$c\,.\,4{,}1\ \ .\,10^{-5}$	$2\ \ .\,10^{-5}$	$i\ 5{,}1\,.\,10^{3}$
$\tau = \frac{1}{3}10^{-8}$	Pt $\varrho = 0{,}02$	$c\,.\,1{,}33\,.\,10^{-2}$	$5{,}15\,.\,10^{-3}$	$i\ 4{,}8$
	„ $\varrho = 0{,}002$	$c\,.\,1{,}33\,.\,10^{-1}$	$5{,}15\,.\,10^{-4}$	$i\ 4{,}8\,.\,10^{-1}$
	„ $\varrho = 0{,}0002$	$c\,.\,1{,}33$	$5{,}15\,.\,10^{-5}$	$i\ 4{,}8\,.\,10^{-2}$

Aus dieser Tabelle können wir am deutlichsten die Unterschiede der beiden Arten Wellen entnehmen. Am größten ist der Unterschied der Größenordnung der radialen Dämpfung im äußeren Medium und das Verhalten der Geschwindigkeiten der Haupt- und Nebenwelle.

Als charakteristische Eigenschaften der Nebenwellen haben wir folgende drei zu bezeichnen:

I. Bei Änderung der Versuchsverhältnisse ändert sich ihre Geschwindigkeit im selben Sinne wie die Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit bei der Hauptwelle, aber viel stärker, und ist bei gewöhnlicher Metalleitfähigkeit und nicht äußerst kleinem Drahtradius sehr gering.

II. Die Dämpfung der Nebenwellen in der Achsenrichtung ist so groß, daß ihre Beobachtung absolut unmöglich ist, und

III. In bezug auf den Skineffekt verhalten sich die beiden Medien bei den Nebenwellen umgekehrt wie bei der Hauptwelle.

Bei der Hauptwelle haben wir nämlich eine starke Abnahme des Feldes gegen das Innere des Drahtes zu, die sich aus dem imaginären Teil von y bestimmt, und eine sehr langsame radiale Abnahme im äußeren Medium. Bei den Nebenwellen dagegen ist das Feld im Inneren des Drahtes fast gleichmäßig verteilt und ein im allgemeinen starker Skineffekt ist im äußeren Medium zu konstatieren, der durch den imaginären Teil von x bedingt wird.

§ 10. Vorgänge, bei welchen der Energiefluß im Unendlichen nicht verschwindet.

In allen unseren bisherigen Betrachtungen haben wir im Medium I (Luft) nur die erste Hankelsche Funktion zugelassen, und von den Lösungen der transzendenten Gleichung verlangt, daß sie das Argument der Hankelschen Funktion zu einer komplexen Zahl mit positiv imaginärem Teil machen, so daß das Feld und der Poyntingsche Strahlungsvektor $\mathfrak{S}$ im Unendlichen exponentiell verschwinden, der Energiefluß also durch eine unendlich ferne, der Drahtachse parallele Zylinderfläche sicher gleich Null ist.

Für verschiedene Probleme aber können auch solche Lösungen nützlich sein, bei welchen der Energiefluß im Unendlichen nicht verschwindet, sondern eine Ausstrahlung liefert.

Selbstverständlich dürfen dabei die Feldkomponenten im Unendlichen nicht unendlich werden, sie müssen sogar mindestens wie $r^{-1/2}$, der Strahlungsvektor also wie $1/r$ verschwinden, weil sonst die Integration über die unendlich ferne Zylinderfläche einen unendlich großen Energiefluß ergeben würde.

Wir nehmen also jetzt das Argument der Zylinderfunktion im Außenraume als reell an. In diesem Falle aber dürfen wir uns nicht auf die eine Hankelsche Funktion beschränken, sondern wir müssen die allgemeine Zylinderfunktion mit zwei unabhängigen Konstanten in der Form

$$a J_n + b Y_n$$

oder symmetrischer

$$a H_{1,n} + b H_{2,n}$$

ansetzen.

In den Ausdrücken (16), (18) ist also für das Medium I. $\delta_n C_n$, $\varepsilon_n C_n$ usw. durch $\Delta_1 H_{1,n} + \Delta_2 H_{2,n}$, $\mathsf{E}_1 H_{1,n} + \mathsf{E}_2 H_{2,n}$ usw. zu ersetzen.

Jetzt haben wir mehr Konstanten als Grenzbedingungen. Die transzendente Gleichung fällt fort und wir dürfen λ beliebig wählen unter der Bedingung, daß $\sqrt{k_1^2 - \lambda^2}$ reell wird.

Bevor wir über die übrigen Koeffizienten etwas aussagen, wollen wir den Betrag des Energieflusses durch die Längeneinheit einer unendlich entfernten Zylinderfläche abschätzen.

Dieser beträgt:

$$F = \int_0^{2\pi} r\, d\varphi\, \mathfrak{S}_r = c \int_0^{2\pi} r\, d\varphi \{\mathfrak{E}_\varphi \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_\varphi\}.$$

Nun ist:

$$\mathfrak{E}_\varphi = \begin{pmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{pmatrix} \mathfrak{E}_\varphi', \qquad \mathfrak{E}_z = \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix} \mathfrak{E}_z',$$

$$\mathfrak{H}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix} \mathfrak{H}_\varphi', \qquad \mathfrak{H}_z = \begin{pmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{pmatrix} \mathfrak{H}_z',$$

wobei die gestrichenen Größen von φ unabhängig sind.

Die Integration nach φ ergibt also:

$$F = s \cdot c\pi r \{\mathfrak{E}_\varphi' \mathfrak{H}_z' - \mathfrak{E}_z' \mathfrak{H}_\varphi'\},$$

wobei

$$s = 1 \quad \text{für} \quad n > 0$$

$$s = 2 \quad \text{für} \quad n = 0.$$

Jetzt wollen wir die in F vorkommenden Größen $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$ ausrechnen. Es ist zu beachten, daß wir bei der Bildung des Strahlungsvektors nicht mit den komplexen Ausdrücken (16), (18) operieren dürfen, sondern zum reellen Teil übergehen müssen.

Zu diesem Zwecke wollen wir die z. B. in (16) vorkommenden Konstanten in ihren reellen und imaginären Teil zerlegen. Wir setzen also:

$$(41)\qquad \begin{cases} \Delta_1 = D_1 + i d_1, & \Delta_2 = D_2 + i d_2, \\ \mathsf{E}_1 = E_1 + i e_1, & \mathsf{E}_2 = E_2 + i e_2, \\ \lambda = \alpha + i\beta, & \lambda^2 = A + iB, \end{cases}$$

$$\mu_1 = 1, \quad k_1^2 = K + iq, \quad \sqrt{k_1^2 - \lambda^2} = \varkappa.$$

k_1^2 ist zwar mit großer Näherung rein reell, in Wirklichkeit aber hat auch die Luft eine sehr geringe Leitfähigkeit. (Man kann wohl allgemein einen Nichtleiter nicht anders fassen wie als Grenzfall eines sehr schlechten Leiters.) Wir werden also vorläufig q als endlich betrachten und sehen, daß diese Spur von Leitfähigkeit der Luft eine prinzipielle Bedeutung hat.

Für sehr große r erhalten wir aus (16), indem wir die Näherungsformeln des Anhangs anwenden, die Glieder von höherer als $(-\frac{1}{2})^{\text{ter}}$ Ordnung in r weglassen und zum reellen Teil übergehen, nachdem wir noch durch $(1-i)i^n$ dividiert haben[1]):

$$\mathfrak{E}_z' = -e^{-\beta z}\frac{\varkappa}{\sqrt{\pi\varkappa r}}\left\{\begin{matrix}(-1)^{n+1}P_1\cos\Phi + (-1)^n Q_1\sin\Phi \\ + Q_2\cos\Psi + P_2\sin\Psi\end{matrix}\right\},$$

$$\mathfrak{E}_\varphi' = -e^{-\beta z}\frac{1}{\sqrt{\pi\varkappa r}}\left\{\begin{matrix}(-1)^{n+1}T_1\cos\Phi - (-1)^n S_1\sin\Phi \\ + S_2\cos\Psi - T_2\sin\Psi\end{matrix}\right\},$$

$$\mathfrak{H}_z' = -e^{-\beta z}\frac{c}{\omega}\frac{\varkappa}{\sqrt{\pi\varkappa r}}\left\{\begin{matrix}(-1)^{n+1}T_1\cos\Phi - (-1)^n S_1\sin\Phi \\ - S_2\cos\Psi + T_2\sin\Psi\end{matrix}\right\},$$

1) Dies geschieht aus praktischen Gründen zur Vereinfachung der Rechnungen. Wir dürfen es tun, ohne daß unsere Schlüsse etwas an Allgemeinheit einbüßen.

$$\mathfrak{H}_\varphi' = + e^{-\beta z} \frac{c}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\pi \varkappa r}} \left\{ \begin{array}{l} (-1)^n [q P_1 + K Q_1] \sin \Phi \\ + (-1)^n [-K P_1 + q Q_1] \cos \Phi \\ \quad + [q Q_2 - K P_2] \sin \Psi \\ \quad - [K Q_2 + q P_2] \cos \Psi \end{array} \right\},$$

wobei:

$$\Phi = \alpha z - \omega t + \varkappa r,$$
$$\Psi = \alpha z - \omega t - \varkappa r,$$
$$P = \alpha D - \beta d, \quad S = K E - q e,$$
$$Q = \alpha d + \beta D, \quad T = K e + q E.$$

Uns interessiert der zeitliche Mittelwert des Energieflusses $\bar{F}$.

Berücksichtigen wir, daß:

$$\overline{\cos^2 \Phi} = \overline{\cos^2 \Psi} = \overline{\sin^2 \Phi} = \overline{\sin^2 \Psi} = \tfrac{1}{2},$$
$$\overline{\cos \Phi \sin \Phi} = \overline{\cos \Psi \sin \Psi} = 0,$$
$$\overline{\cos \Phi \cos \Psi} = \overline{\sin \Phi \sin \Psi} = \tfrac{1}{2} \cos 2 \varkappa r,$$
$$-\overline{\cos \Phi \sin \Psi} = \overline{\sin \Phi \cos \Psi} = \tfrac{1}{2} \sin 2 \varkappa r,$$

so erhalten wir:

$$\bar{F} = e^{-2\beta z} \frac{c^2}{\omega} \frac{s}{2} \left\{ \begin{array}{l} T_1^2 + S_1^2 - T_2^2 - S_2^2 \\ + K(P_1^2 + Q_1^2 - P_2^2 - Q_2^2) \\ + (-1)^n 2 q (P_1 Q_2 - P_2 Q_1) \sin 2 \varkappa r \\ + (-1)^n 2 q (Q_1 Q_2 + P_1 P_2) \cos 2 \varkappa r \end{array} \right\}$$

und nach einigen einfachen Rechnungen:

$$\bar{F} = e^{-2\beta z} \frac{c^2}{\omega} \frac{s}{2} \left\{ \begin{array}{l} |k_1^2 (\mathsf{E}_1^2 - |\mathsf{E}_2^2|) \\ + K |\lambda^2| (|\Delta_1^2| - |\Delta_2^2|) \\ + 2 (-1)^n q |\lambda^2| (D_1 D_2 + d_1 d_2) \cos 2 \varkappa r \\ + 2 (-1)^n q |\lambda^2| (D_1 d_2 - D_2 d_1) \sin 2 \varkappa r \end{array} \right\}.$$

Bei endlichem q bleibt also r im Ausdruck des Energieflusses stehen, und zwar in der Form cos, $\sin 2 \varkappa r$. Diese Abhängigkeit von r wäre nur durch eine recht komplizierte Anordnung von Quellen und Senken im Unendlichen möglich, welche nie zu realisieren ist.

Damit r aus unserem Ausdruck verschwindet, müssen wir eine der folgenden Annahmen machen:

1. $\lambda = 0$. Diese Annahme ist nicht zulässig, weil dann $\varkappa = \sqrt{k_1^2 - \lambda^2} = k_1$ im allgemeinen nicht reell ist.

2. $\varkappa = 0$. Ist ebenfalls auszuschließen, weil, abgesehen davon, daß bei verschwindendem Argument $\varkappa r$ die Hankelschen Funktionen singulär werden, gleichzeitig das Feld im Außenraum von r unabhängig sein würde.

3. Es bleibt uns also nur die dritte Annahme übrig:

$$D_1 D_2 + d_1 d_2 = D_1 d_2 - D_2 d_1 = 0 .$$

D. h. entweder

(42) $$D_2 = d_2 = 0, \quad \text{also} \quad \Delta_2 = 0$$

oder

(43) $$D_1 = d_1 = 0, \quad \text{also} \quad \Delta_1 = 0 .$$

Der Energiefluß wird dann

(44) $$\bar{F} = e^{-2\beta z} \frac{c^2}{\omega} \frac{s}{2} |k_1^2| (|\mathsf{E}_1^2| - |\mathsf{E}_2^2|) + K|\lambda^2||\Delta_1^2|,$$

bzw.

(45) $$\bar{F} = e^{-2\beta z} \frac{c^2}{\omega} \frac{s}{2} k_1^2 (\mathsf{E}_1^2 - \mathsf{E}_2^2) - K \lambda^2 \Delta_2^2|.$$

Aus dem Verhalten des Energieflusses im Unendlichen haben wir also eine fünfte Bedingung (42) bzw. (43) zur Koeffizientenbestimmung bekommen. Wir wollen jetzt, mit Rücksicht auf diese Bedingung, der Reihe nach erst die Lösungen (16) und (18) für $n = 0$ etwas näher betrachten, und dann die allgemeine Lösung für $n > 0$.

I. In der Partikularlösung (16) kommen für $n = 0$ ($\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_z, \mathfrak{E}_r$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\varphi$) die Koeffizienten E_1, E_2 gar nicht vor. Wir haben außer λ nur die Konstanten δ im Inneren des Drahtes und Δ_1, Δ_2 im Äußeren. Wegen der Bedingung (42) oder (43) fällt aber eine von den Konstanten Δ fort; daher haben wir außer λ nur die zwei Konstanten δ und Δ_1 oder Δ_2. Die zwei Grenzbedingungen führen zu einer transzendenten Gleichung

$$\frac{k_1^2}{\mu_1} \frac{1}{x} \frac{H_0'(x)}{H_0(x)} = \frac{k_2^2}{\mu_2} \frac{1}{y} \frac{J'(y)}{J(y)}$$

mit der Nebenbedingung x reell. H ist die erste oder zweite Hankelsche Funktion, je nachdem wir Δ_2 oder Δ_1 gleich Null gesetzt haben.

Es ist leicht zu sehen, daß unsere transzendente Gleichung für kein reelles x erfüllt werden kann.

Eine mit Ein- bzw. Ausstrahlung verbundene elektrische symmetrische Welle (vgl. § 4) existiert also nicht.

II. In der partiellen Lösung (18) haben wir für $n = 0$ nur die Koeffizienten ε_0 im Inneren und E_1 und E_2 im Äußeren. Es ist also von selbst

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 0 .$$

Die Nebenbedingung (42) bzw. (43) ist erfüllt, und wir haben nur noch die zwei Grenzbedingungen.

Nachdem wir also λ willkürlich bestimmt haben (unter der Bedingung $\sqrt{k_1^2 - \lambda^2}$ reell) können wir noch über einen von den Koeffizienten verfügen, und aus den nunmehr nicht homogenen Grenzbedingungen werden die übrigen zwei eindeutig bestimmt.

Jedem λ entspricht also eine bis auf einen Proportionalitätsfaktor eindeutig bestimmte Lösung.

III. $n > 0$. Nachdem wir λ willkürlich gewählt haben, selbstverständlich unter Beibehaltung der Realitätsbedingung, haben wir zur Bestimmung der sechs Konstanten δ_n, ε_n, $\mathsf{E}_{1,n}$, $\mathsf{E}_{2,n}$, $\Delta_{1,n}$, $\Delta_{2,n}$ die vier Grenzbedingungen und eine von den Nebenbedingungen (42), (43). Die Koeffizienten sind also auch hier wie in II bis auf einen Proportionalitätsfaktor eindeutig bestimmt.

Setzen wir nun

$$\lambda^2 = k_1^2 - \frac{\varkappa^2}{\varrho^2},$$

so bedeutet $\varkappa$ eine beliebige reelle Zahl. Auch k_1^2 dürfen wir jetzt als reell annehmen. Für

$$0 < \frac{\varkappa^2}{\varrho^2} \leqq k_1^2$$

ist $\lambda^2 \geqq 0$, also λ reell.

Da die Abhängigkeit des Feldes von z, t von der Form $e^{-i\omega t + i\lambda z}$ ist, so haben wir für diese Werte von λ eine in der Richtung z ungedämpfte, mit Überlichtgeschwindigkeit fortschreitende Welle. Der Draht verzehrt, falls er ein Leiter

ist, Energie als Joulesche Wärme. Diese Energie kann nur durch Einstrahlung vom Unendlichen zugeführt werden.

Für $\varkappa^2/\varrho^2 > k_1^2$ ist $\lambda^2 < 0$, also λ rein imaginär. Wir haben einen zeitlich periodischen, in der z Richtung aperiodisch gedämpften Vorgang. Die Dämpfung ist um so größer, je größer $|\lambda|$ ist.

Ob der Vorgang mit Ein- oder Ausstrahlung verbunden ist, ist aus dem Vorzeichen von $\bar{F}$ in (44) oder (45) zu entnehmen. $\bar{F} > 0$ bedeutet Ausstrahlung, $\bar{F} < 0$ Einstrahlung.

Wir müssen wieder hervorheben, daß der elektrische symmetrische Wellentypus auch bei diesen mit Ein- oder Ausstrahlung verbundenen Vorgängen eine Ausnahmestellung einnimmt: bei den eigentlichen Drahtwellen hat die elektrische Gleichung (23) die Hauptlösung, welche den anderen Gleichungen fehlt. Wir haben eine durch große Geschwindigkeit und kleine Dämpfung ausgezeichnete Welle. Hier ist im Gegenteil die elektrische Welle unmöglich und nur die magnetische und die unsymmetrische können existieren.

§ 11. Schlußbemerkungen.

Die in dieser Arbeit hauptsächlich behandelten symmetrischen und unsymmetrischen Nebenwellen können, wie schon mehrmals hervorgehoben, bei leitendem Material wegen ihrer großen Dämpfung nie zur Beobachtung kommen. Trotzdem sind sie nicht ohne Bedeutung und müssen immer auftreten, wo die Gradlinigkeit oder Symmetrie des Drahtes aufhört. Mit ihrer Hilfe wie auch der in § 11 behandelten dürften einige wichtige Probleme eine strenge Lösung finden. Z. B. die Frage nach der durch elektromagnetische Wellen bedingte Ausstrahlung eines geknickten oder frei endenden Drahtes. Für diese Probleme werden die im vorigen Paragraphen behandelten aperiodisch abnehmenden Lösungen mit der Ausstrahlung nach dem Unendlichen nützlich sein.

Durch die unsymmetrischen Drahtwellen wäre vielleicht auch das Problem der zwei parallelen Drähte einfacher zu behandeln als es bisher möglich war.

Anhang I.

Näherungsformeln für die Zylinderfunktionen.

Wir stellen hier der Bequemlichkeit halber eine Reihe von Näherungsformeln für die Besselschen Funktionen $J_n(x)$ und die zwei Hankelschen Funktionen $H_{1,n}(x)$, $H_{2,n}(x)$ zusammen, die wir im Text wiederholt nötig gehabt haben.[1])

Die Besselsche Funktion vom ganzzahligen Index $n \geqq 0$ ist eine ganze transzendente Funktion, also überall im endlichen regulär, und wird durch die Reihe dargestellt:

$$J_n(x) = \sum_0^\infty{}^s \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{s!\,(n+s)!} \cdots \tag{46}$$

Für sehr kleine Argumente können wir die Reihe schon beim ersten Glied abbrechen und erhalten:

$$\begin{cases} \text{a)} & J_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n, \\ \text{b)} & J_n'(x) = \frac{1}{2.(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}, \quad n > 0, \\ \text{c)} & J_0'(x) = -\frac{x}{2}, \end{cases} \tag{47}$$

also

$$\begin{cases} \text{a)} & \frac{J_0'(x)}{J_0(x)} = -\frac{x}{2}, \\ \text{b)} & \frac{J_n'(x)}{J_n(x)} = \frac{n}{x}, \quad n > 0. \end{cases} \tag{48}$$

Für große Argumente ist

$$J_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\left\{e^{ix - \frac{2n+1}{4}\pi i} + e^{-ix + \frac{2n+1}{4}\pi i}\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right),$$

$$\frac{J_n'(x)}{J_n(x)} = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right). \tag{49}$$

Ist der imaginäre Teil von x sehr groß, so ist

$$\frac{J_n'(x)}{J_n(x)} = \mp i, \tag{50}$$

je nachdem dieser imaginäre Teil positiv oder negativ ist.

1) Vgl. darüber z. B. N. Nielsen, Handbuch d. Theorie d. Zylinderfunktionen. Leipzig 1904.

Die zwei Hankelschen Funktionen werden durch die Ausdrücke gegeben:

$$(51)\quad \begin{cases} H_{(1,2),n}(x) = J_n(x)\left\{1 \pm \frac{2i}{\pi}\left(C + \lg\frac{x}{2}\right)\right\} \\ \qquad \mp \frac{i}{\pi}\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{s!\,(n+s)!}\cdot\lambda(s) \\ \qquad \mp \frac{i}{\pi}\sum_0^{n-1}{}_s \frac{(n-s-1)!}{s!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2s}, \end{cases}$$

wobei $C = 0{,}5772$ die Eulersche Konstante und

$$\lambda(s) = 1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{s}, \quad \lambda(0) = 0.$$

Für $x = 0$ haben die H-Funktionen außer der logarithmischen Singularität noch einen Pol n^{ter} Ordnung. Für $n = 0$ fällt der Pol aus und es bleibt nur das logarithmische Unendlichwerden. Es ist also für sehr kleine x

$$(52)\quad H_{(1,2)0} \simeq 1 \pm \frac{2i}{\pi}\left(C + \lg\frac{x}{2}\right) \mp \frac{i}{\pi} = \pm\frac{2i}{\pi}\lg\frac{\alpha_{1,2}\,x}{2},$$

wobei

$$\lg\alpha_{1,2} = C - \tfrac{1}{2} \mp \frac{\pi i}{2},$$

$$(53)\quad \alpha_{1,2} = e^{\mp\frac{\pi i}{2} + 0{,}0772} \simeq \mp i,$$

also

$$(54)\quad H_{(1,2)0}'(x) \simeq \pm\frac{2i}{\pi}\cdot\frac{1}{x}$$

und

$$(55)\quad \frac{H_{(1,2)0}'(x)}{H_{(1,2)0}(x)} = \frac{1}{x\lg\frac{\alpha_{1,2}\,x}{2}}.$$

Für $n > 0$ überwiegt der n^{te} Pol bei weitem und so ist:

$$H_{(1,2)n}(x) = \mp\frac{i}{\pi}(n-1)!\left(\frac{2}{x}\right)^n,$$

also

$$(56)\quad \frac{H_{(1,2)n}'(x)}{H_{(1,2)n}(x)} \simeq -\frac{n}{x}.$$

Für große Argumente haben wir die angenäherten Formeln:

$$(57)\quad \begin{cases} \text{a)} \quad H_{(1,2)n}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{\pm i\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right)}, \\ \text{b)} \quad H_{(1,2)n}'(x) = \pm i\,H_{(1,2)n}(x), \\ \text{c)} \quad \frac{H_{(1,2)n}'(x)}{H_{(1,2)n}(x)} = \pm i. \end{cases}$$

Diese Formeln gelten zunächst nur für die positiv-reelle Halbebene. Für ganzzahlige Indizes n aber kann man auf Grund der „Umlaufsrelationen“ leicht nachweisen, daß sie auch auf der ganzen längs der negativen reellen Achse durchschnittenen Ebene gelten.

Setzen wir $x = R e^{i\varphi}$, so sind die physikalisch wichtigsten für $R = \infty$ verschwindenden Zweige der H-Funktionen, für $H_{1,n}$ der Zweig $0 < \varphi < \pi$, für $H_{2,n}$ der Zweig $-\pi < \varphi < 0$. Diese Zweige nennen wir die Hauptzweige der betreffenden Funktionen.

Anhang II.

Berechnung der Ausdrücke für die Feldkomponenten und Reduktion auf die einfachere Form (16).

Setzen wir in den Formeln (14) die Werte von Z, R, Φ aus (11), (12) und (13b) ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{E}_z &= \cos n\varphi \left\{ \begin{aligned} &\alpha_n(k^2-\lambda^2)C_n - i\lambda\beta_n\left[\frac{n}{r}C_{n-1} - \frac{1}{r}\frac{dr\,C_{n-1}}{dr}\right] \\ &+ i\lambda\gamma\left[\frac{n}{r}C_{n+1} + \frac{1}{r}\frac{dr\,C_{n+1}}{dr}\right] \end{aligned}\right\} \\
\mathfrak{E}_r &= \cos n\varphi \left\{ \begin{aligned} &i\lambda\alpha_n\frac{dC_n}{dr} + \beta_n\left[\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dr\,C_{n-1}}{dr} - n\frac{d}{dr}\frac{C_{n-1}}{r} + k^2 C_{n-1}\right] \\ &+ \gamma_n\left[\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dr\,C_{n+1}}{dr} + n\frac{d}{dr}\frac{C_{n+1}}{r} + k^2 C_{n+1}\right] \end{aligned}\right\} \\
\mathfrak{E}_\varphi &= \sin n\varphi \left\{ \begin{aligned} &-in\lambda\alpha_n\frac{C_n}{r} - \beta_n\left[\frac{n}{r^2}\frac{dr\,C_{n-1}}{dr} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)C_{n-1}\right] \\ &- \gamma_n\left[\frac{n}{r^2}\frac{dr\,C_{n+1}}{dr} - \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)C_{n+1}\right] \end{aligned}\right\} \\
\mathfrak{H}_z &= -\sin n\varphi \frac{ick^2}{\omega\mu}\frac{1}{r}\left\{ \begin{aligned} &\beta_n\left[n\,C_{n-1} - \frac{dr\,C_{n-1}}{dr}\right] \\ &+ \gamma_n\left[n\,C_{n+1} + \frac{dr\,C_{n+1}}{dr}\right] \end{aligned}\right\} \\
\mathfrak{H}_r &= -\sin n\varphi \frac{ick^2}{\omega\mu}\left\{ -n\alpha_n\frac{C_n}{r} + i\lambda\left[\beta_n C_{n-1} - \gamma_n C_{n+1}\right]\right\} \\
\mathfrak{H}_\varphi &= -\sin n\varphi \frac{ick^2}{\omega\mu}\left\{ -\alpha_n\frac{dC_n}{dr} + i\lambda\left[\beta_n C_{n-1} + \gamma_n C_{n+1}\right]\right\}
\end{aligned}\right\} e^{-i\omega t + i\lambda z}.$$

Das Argument der Zylinderfunktionen ist überall

$$\sqrt{k^2 - \lambda^2}\, r = x.$$

Diese Ausdrücke wollen wir mit Hilfe der Funktionalgleichungen

$$\text{A)} \quad C_n'(x) = -\frac{n}{x} C_n(x) + C_{n-1}(x),$$

$$\text{B)} \quad C_n'(x) = +\frac{n}{x} C_n(x) - C_{n+1}(x),$$

in andere überführen, in welchen nur die n^{te} Zylinderfunktion und ihre Ableitung vorkommt.

$\mathfrak{E}_z$: Es ist:

$$\frac{n}{r} C_{n-1}(x) - \frac{1}{r}\frac{dr\, C_{n-1}(x)}{dr} = \sqrt{k^2-\lambda^2}\left\{\frac{n}{x} C_{n-1} - \frac{1}{x}\frac{dx\, C_{n-1}}{dx}\right\}$$

$$= \sqrt{k^2-\lambda^2}\left\{\frac{n-1}{x} C_{n-1} - C_{n-1}'\right\} = \sqrt{k^2-\lambda^2}\, C_n\left(\sqrt{k^2-\lambda^2}\, r\right)$$

und ähnlich

$$\frac{n}{r} C_{n+1}(x) + \frac{1}{r}\frac{dr\, C_{n+1}(x)}{dr} = \sqrt{k^2-\lambda^2}\, C_n\left(\sqrt{k^2-\lambda^2}\, r\right).$$

Somit wird

$$\mathfrak{E}_z = e^{-i\omega t + i\lambda z}\cos n\varphi \,.\, \lambda\sqrt{k^2-\lambda^2}\left\{\frac{\alpha_n\sqrt{k^2-\lambda^2}}{\lambda} - i(\beta_n - \gamma_n)\right\} C_n.$$

$\mathfrak{E}_r$: Es ist:

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dr\, C_{n-1}(x)}{dr} - \frac{d}{dr}\frac{n}{r} C_{n-1}(x) + k^2 C_{n-1}(x)$$

$$= \frac{d}{dr}\left\{-\sqrt{k^2-\lambda^2}\, C_n\right\} + k^2\left\{C_n' + \frac{n}{x} C_n\right\}$$

$$= -(k^2-\lambda^2) C_n' + k^2 C_n' + k^2\frac{n}{x} C_n$$

$$= k^2\frac{n}{\sqrt{k^2-\lambda^2}\, r} C_n + \lambda^2 C_n',$$

und ähnlich

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dr\, C_{n+1}}{dr} + \frac{d}{dr}\frac{n}{r} C_{n+1} + k^2 C_{n+1}$$

$$= k^2\frac{n}{\sqrt{k^2-\lambda^2}\, r} C_n - \lambda^2 C_n',$$

also:

$$\mathfrak{E}_r = e^{-i\omega t + i\lambda z}\cos n\varphi \left\{\begin{array}{l} i\lambda^2\left[\frac{\alpha_n\sqrt{k^2-\lambda^2}}{\lambda} - i(\beta_n - \gamma_n)\right] C_n' \\ + \frac{n k^2}{\sqrt{k^2-\lambda^2}\, r}[\beta_n + \gamma_n] C_n \end{array}\right\}.$$

$\mathfrak{E}_\varphi$: Es ist:

$$X = \frac{n}{r^2}\frac{dr\,C_{n-1}}{dr} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) C_{n-1}$$
$$= (k^2 - \lambda^2)\left[\frac{n}{x^2}\frac{dx\,C_{n-1}}{dx} + \left(\frac{k^2}{k^2-\lambda^2} - \frac{n^2}{x^2}\right) C_{n-1}\right]$$
$$= (k^2 - \lambda^2)\left[\frac{n}{x} C'_{n-1} \quad + \left(\frac{k^2}{k^2-\lambda^2} - \frac{n^2-n}{x^2}\right) C_{n-1}\right].$$

Aus A, B erhalten wir:

$$C'_{n-1} = \frac{n-1}{x} C_{n-1} - C_n,$$
$$C_{n-1} = C_n' + \frac{n}{x} C_n,$$
$$C'_{n-1} = \left\{\frac{n^2-n}{x^2} - 1\right\} C_n + \frac{n-1}{x} C_n'.$$

Setzen wir diese Werte ein, so wird:

$$X = \lambda^2 \frac{n}{\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r} C_n + k^2 C_n'.$$

Ähnlich erhalten wir

$$\frac{n}{r^2}\frac{dr\,C_{n+1}}{dr} - \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) C_{n+1} = -\lambda^2 \frac{n}{\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r} C_n + k^2 C_n',$$

und es wird also:

$$\mathfrak{E}_\varphi = e^{-i\omega t + i\lambda z} \sin n\varphi \begin{Bmatrix} -\frac{i n \lambda}{r\sqrt{k^2-\lambda^2}}\left[\frac{\alpha_n \sqrt{k^2-\lambda^2}}{\lambda} - i[\beta_n - \gamma_n]\right] C_n \\ -k^2[\beta_n + \gamma_n] C_n' \end{Bmatrix}.$$

$\mathfrak{H}_z$: Es ist:

$$n C_{n-1} - \frac{dr\,C_{n-1}}{dr} = \sqrt{k^2-\lambda^2}\,r\left[\frac{n}{x} C_{n-1} - \frac{1}{x}\frac{dx\,C_{n-1}}{dx}\right]$$
$$= \sqrt{k^2-\lambda^2}\,r\,C_n,$$
$$n C_{n+1} + \frac{dr\,C_{n+1}}{dr} = \sqrt{k^2-\lambda^2}\,r\,C_n,$$

daher

$$\mathfrak{H}_z = -e^{-i\omega t + i\lambda z} i \frac{c k^2}{\omega \mu} \sqrt{k^2-\lambda^2}\,[\beta_n + \gamma_n] C_n,$$

$\mathfrak{H}_r$, $\mathfrak{H}_\varphi$: Aus A, B erhalten wir:

$$C_{n-1} = \quad C_n' + \frac{n}{\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r} C_n,$$
$$C_{n+1} = -C_n' + \frac{n}{\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r} C_n,$$

so wird:

$$\mathfrak{H}_r = -\, e^{-i\omega t+i\lambda z} \sin n\varphi \frac{i\,c\,k^2}{\omega\,\mu}\lambda \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{n}{r\sqrt{k^2-\lambda^2}}\left[\dfrac{\alpha_n\sqrt{k^2-\lambda^2}}{\lambda} - i(\beta_n-\gamma_n)\right] C_n \\ +\, i\,[\beta_n+\gamma_n]\, C_n' \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{H}_\varphi = -\, e^{-i\omega t+i\lambda z} \cos n\varphi \frac{i\,c\,k^2}{\omega\,\mu}\lambda \left\{ \begin{array}{l} -\left[\dfrac{\alpha_n\sqrt{k^2-\lambda^2}}{\lambda} - i(\beta_n-\gamma_n)\right] C_n' \\ +\, \dfrac{i\,n}{\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r}(\beta_n+\gamma_n)\, C_n \end{array} \right\}.$$

Führen wir die durch die Gleichung (17) definierten neuen Koeffizienten ein, so erhalten wir die Ausdrücke (16).

Lebenslauf.

Ich wurde am 9./21. April 1882 in Serrès (Makedonien) geboren und empfing die Schulbildung in den griechischen Gymnasien zu Serrès und Saloniki. 1901 bezog ich die Universität Athen, wo ich nach vierjährigem Studium das Doktorexamen in Naturwissenschaften mit einer Arbeit über die Leitfähigkeit von Lösungen von $Pb(NO_3)_2$ in Gemischen von Wasser und Alkohol bestand.

1906 ging ich nach Deutschland und verbrachte ein Semester in Göttingen, dann wandte ich mich nach München, um bei Hrn. Prof. A. Sommerfeld zu arbeiten.

Seinen anregenden Vorlesungen und der regen und liebenswürdigen Anteilnahme, die er mir und meiner Arbeit immer entgegenbrachte, verdanke ich, daß mein Aufenthalt in München ein für mich überaus angenehmer und wertvoller gewesen ist.